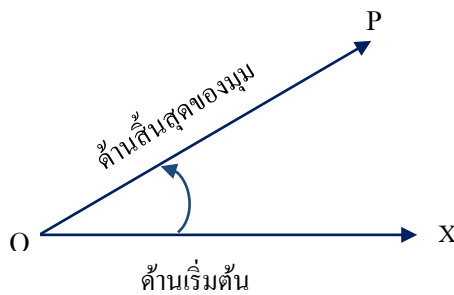


ใบความรู้ มุมและหน่วยการวัดมุม

ในหน่วยนี้จะได้กล่าวถึงมุม หน่วยการวัดมุม และมุมในตำแหน่งมาตรฐาน ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติในหน่วยต่อไป

มุม



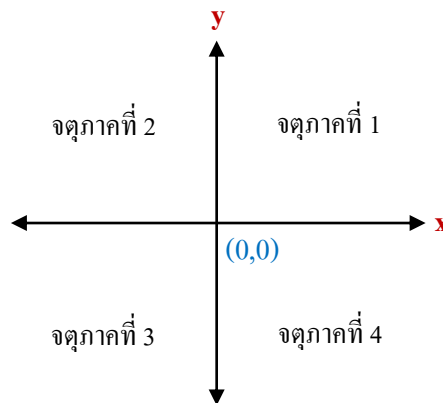
พิจารณาจากรูป มุม POX เกิดจากการหมุนของสองรังสีที่มีจุดเริ่มต้นร่วมกัน

ด้าน OX เรียกว่า ด้านเริ่มต้น (Initial Side)

ด้าน OP เรียกว่า ด้านสิ้นสุด (Terminal Side)

จุด O เรียกว่า จุดมุม หรือจุดยอด (Vertex)

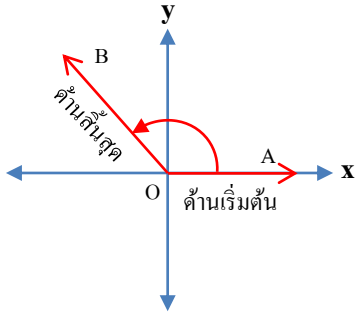
ระนาบพิกัดฉาก



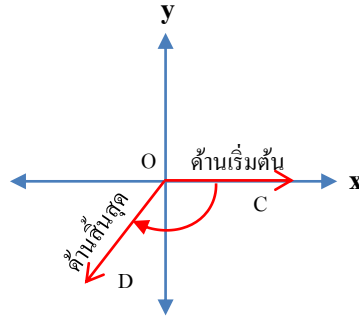
ระนาบพิกัดฉาก เป็นบริเวณที่เกิดจาก แกน x ตัดแกน y เป็นมุมฉากที่จุดๆหนึ่ง เรียกว่า จุดกำเนิด (Origin) ทำให้แบ่งพิกัดฉากออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า จตุภาค หรือ ควอดรนต์ (Quadrant) สำหรับด้านเริ่มต้นของมุมจะอยู่บนแกน x ทางด้านบวก ส่วนด้านสิ้นสุดของมุมจะอยู่ในจตุภาคใด ขึ้นอยู่กับขนาดและทิศทางของการหมุนของมุม

มุมในตำแหน่งมาตรฐาน

มุมในตำแหน่งมาตรฐาน จุดยอดมุมจะอยู่ที่จุดศูนย์กลางด้านเริ่มต้นของมุมซึ่งจะอยู่บนแกน x ด้านบวก ถ้าทิศทางการหมุนของมุมเป็นแบบทวนเข็มนาฬิกา มุมที่เกิดขึ้นจะมีเครื่องหมายเป็นบวก แต่ถ้าทิศทางการหมุนของมุมเป็นแบบตามเข็มนาฬิกา มุมที่เกิดขึ้นจะมีเครื่องหมายเป็นลบ



มุม AOB มีเครื่องหมายเป็นบวก



มุม COD มีเครื่องหมายเป็นลบ

หน่วยของการวัดมุม

1. การวัดมุมหน่วยเป็นองศา (degree)

หน่วยของมุมเป็นองศา ยังแบ่งหน่วยย่อยเป็นลิปดา และฟิลิปดา กล่าวคือ ในแต่ละ 1 องศา (1°) จะแบ่งเป็นหน่วยย่อย คือ 60 ลิปดา ($60'$) และในแต่ละลิปดา จะแบ่งเป็นหน่วยย่อย คือ 60 ฟิลิปดา ($60''$)

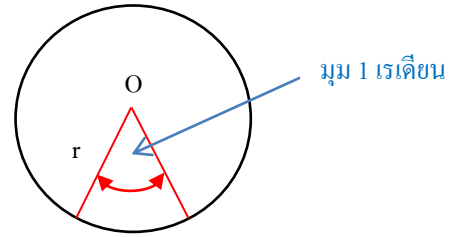
	1 องศา	เท่ากับ	60	ลิปดา
	1 ลิปดา	เท่ากับ	60	ฟิลิปดา
ดังนั้น	1 องศา	เท่ากับ	3,600	ฟิลิปดา

ตัวอย่างที่ 1 จงเปลี่ยนมุม $20^\circ 10' 15''$ ให้อยู่ในมุมหน่วยขององศา

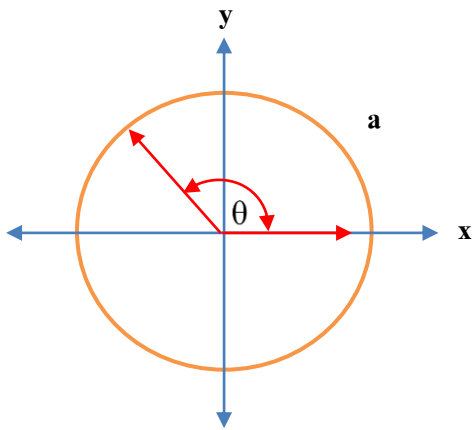
$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad 10 \text{ ลิปดา} &= \frac{1 \times 10}{60} \text{ องศา} \\
 &\approx 0.1667 \text{ องศา} \\
 15 \text{ ฟิลิปดา} &= \frac{1 \times 15}{3,600} \text{ องศา} \\
 &\approx 0.0042 \text{ องศา} \\
 \text{ดังนั้น } 20^\circ 10' 15'' &\approx 20^\circ + 0.1667^\circ + 0.0042^\circ \\
 &\approx 20.1709^\circ
 \end{aligned}$$

2. การวัดมุมหน่วยเป็นเรเดียน (radian)

มุม 1 เรเดียน คือมุมที่มีขนาดเท่ากับ มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่รองรับด้วย ส่วนโค้งที่ยาวเท่ากับรัศมี



การหาขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม



จากรูป

θ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

a แทนความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม θ

r แทนรัศมีของวงกลม

$$\text{มุม } \theta \text{ มีขนาด} = \frac{a}{r} \text{ เรเดียน}$$

$$\text{มุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลม} = \frac{\text{ความยาวเส้นรอบวงของรัศมี}}{\text{รัศมี}}$$

$$= \frac{2\pi r}{r}$$

$$= 2\pi \text{ เรเดียน}$$

และมุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลม เท่ากับ 360 องศา

$$360 \text{ องศา} = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

$$180 \text{ องศา} = \pi \text{ เรเดียน}$$

$$1 \text{ องศา} = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน}$$

$$\approx 0.0175 \text{ เรเดียน}$$

$$1 \text{ เรเดียน} = \frac{180}{\pi} \text{ องศา}$$

$$\approx 57.3 \text{ องศา}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงเปลี่ยนมุม 30 องศา ให้อยู่ในหน่วยของเรเดียน

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad & \text{เนื่องจาก มุม } 1 \text{ องศา} &= & \frac{\pi}{180} & \text{เรเดียน} \\ & \text{มุม } 30 \text{ องศา} &= & \frac{\pi}{180} \times 30 & \text{เรเดียน} \\ & &= & \frac{\pi}{6} & \text{เรเดียน} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงเปลี่ยนมุม 315 องศา ให้อยู่ในหน่วยของเรเดียน

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad & \text{เนื่องจาก มุม } 1 \text{ องศา} &= & \frac{\pi}{180} & \text{เรเดียน} \\ & \text{มุม } 315 \text{ องศา} &= & \frac{\pi}{180} \times 315 & \text{เรเดียน} \\ & &= & \frac{7\pi}{4} & \text{เรเดียน} \end{aligned}$$

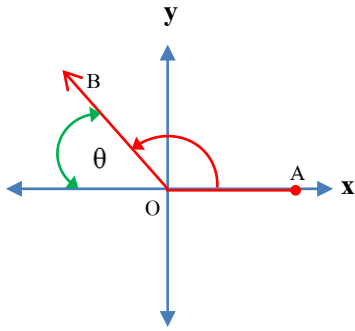
ตัวอย่างที่ 4 จงเปลี่ยนมุม $\frac{\pi}{5}$ เรเดียน ให้อยู่ในหน่วยขององศา

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad & \text{เนื่องจาก มุม } 1 \text{ เรเดียน} &= & \frac{180}{\pi} & \text{องศา} \\ & \text{มุม } \frac{\pi}{5} \text{ เรเดียน} &= & \frac{180}{\pi} \times \frac{\pi}{5} & \text{องศา} \\ & &= & 36 & \text{องศา} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงเปลี่ยนมุม $\frac{7\pi}{6}$ เรเดียน ให้อยู่ในหน่วยขององศา

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad & \text{เนื่องจาก มุม } 1 \text{ เรเดียน} &= & \frac{180}{\pi} & \text{องศา} \\ & \text{มุม } \frac{7\pi}{6} \text{ เรเดียน} &= & \frac{180}{\pi} \times \frac{7\pi}{6} & \text{องศา} \\ & &= & 210 & \text{องศา} \end{aligned}$$

การหมุนของมุม



จากรูป มุม AOB เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน

O เป็นจุดยอดมุม

OA เป็นด้านเริ่มต้น

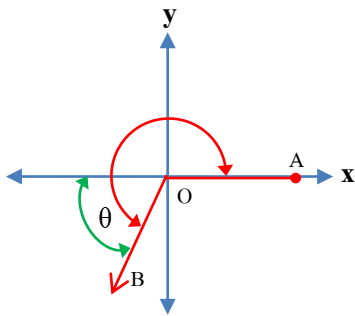
OB เป็นด้านสิ้นสุด อยู่ในจุดภาคที่ 2

θ เป็นมุมแหลม และเป็นมุมที่อยู่ระหว่างด้านสิ้นสุด

ของมุม AOB กับแกน x

ขนาดของมุม AOB มากกว่า 90 องศา และน้อยกว่า 180 องศา หรือ π เรเดียน

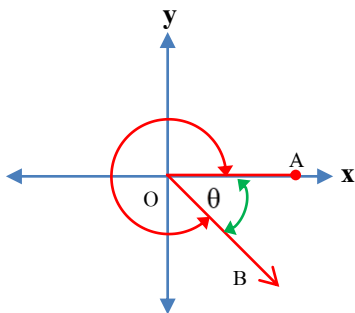
ดังนั้นมุม AOB เท่ากับ $180^\circ - \theta$ หรือ $\pi - \theta$



จากรูป มุม OB เป็นด้านสิ้นสุดมุม AOB อยู่ในจุดภาคที่ 3

ขนาดของมุม AOB มากกว่า 180 องศา หรือ π เรเดียน

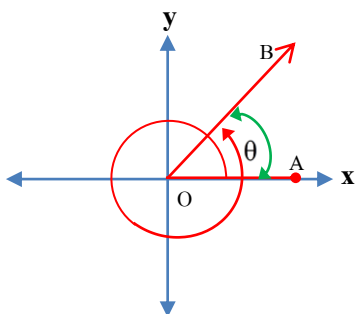
ดังนั้นมุม AOB เท่ากับ $180^\circ + \theta$ หรือ $\pi + \theta$



จากรูป มุม OB เป็นด้านสิ้นสุดมุม AOB อยู่ในจุดภาคที่ 4

ขนาดของมุม AOB มากกว่า 270 องศา และน้อยกว่า 360 องศา หรือ 2π เรเดียน

ดังนั้นมุม AOB เท่ากับ $360^\circ - \theta$ หรือ $2\pi + \theta$



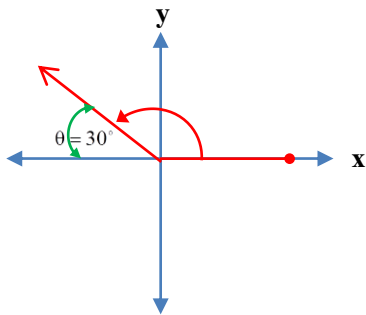
จากรูป มุม OB เป็นด้านสิ้นสุดมุม AOB อยู่ในจุดภาคที่ 1

ขนาดของมุม AOB มากกว่า 360 องศา หรือ 2π เรเดียน

ดังนั้นมุม AOB เท่ากับ $360^\circ + \theta$ หรือ $2\pi + \theta$

ตัวอย่างที่ 6 มุมที่กำหนดต่อไปนี้อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน ด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในจุดภาคใด

1) มุม 150 องศา

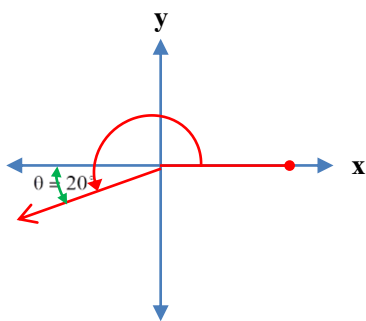


วิธีทำ $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$

และ $\theta = 30^\circ$

ด้านสิ้นสุดของมุม 150 องศา อยู่ในจุดภาคที่ 2

2) มุม 200 องศา

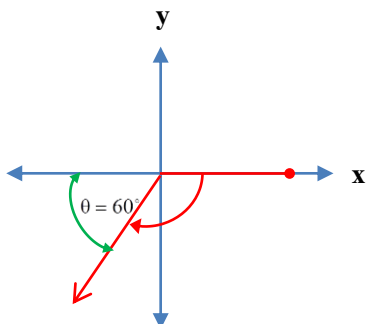


วิธีทำ $200^\circ = 180^\circ + 20^\circ$

และ $\theta = 20^\circ$

ด้านสิ้นสุดของมุม 200 องศา อยู่ในจุดภาคที่ 3

3) มุม -120 องศา

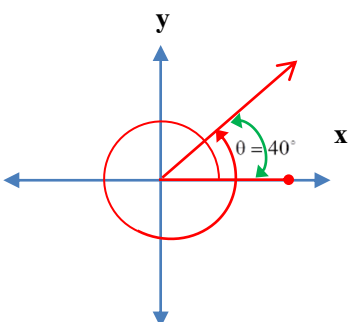


วิธีทำ $-120^\circ = -(180^\circ - 60^\circ)$

และ $\theta = 60^\circ$

ด้านสิ้นสุดของมุม -120 องศา อยู่ในจุดภาคที่ 3

4) มุม 400 องศา



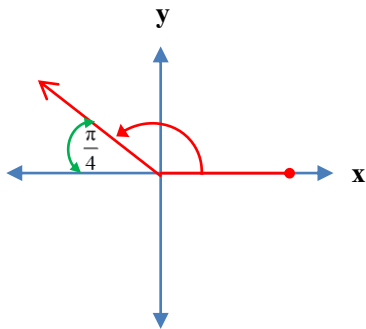
วิธีทำ $400^\circ = 360^\circ + 40^\circ$

และ $\theta = 40^\circ$

ด้านสิ้นสุดของมุม 400 องศา อยู่ในจุดภาคที่ 1

ตัวอย่างที่ 7 มุมที่กำหนดต่อไปนี้อยู่ในตำแหน่ง ด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในจตุภาคใด

1) มุม $\frac{3\pi}{4}$ เรเดียน

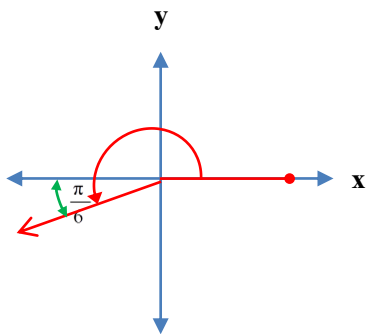


วิธีทำ $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$

และ $\theta = \frac{\pi}{4}$

ด้านสิ้นสุดของมุม $\frac{3\pi}{4}$ เรเดียน อยู่ในจตุภาคที่ 2

2) มุม $\frac{7\pi}{6}$ เรเดียน

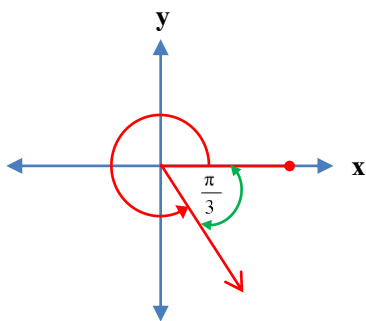


วิธีทำ $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$

และ $\theta = \frac{\pi}{6}$

ด้านสิ้นสุดของมุม $\frac{7\pi}{6}$ เรเดียน อยู่ในจตุภาคที่ 3

3) มุม $\frac{5\pi}{3}$ เรเดียน



วิธีทำ $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

และ $\theta = \frac{\pi}{3}$

ด้านสิ้นสุดของมุม $\frac{5\pi}{3}$ เรเดียน อยู่ในจตุภาคที่ 4

นักเรียนลองทำแบบฝึกหัดกัน
เพื่อเพิ่มความเข้าใจกันด้วยนะ

