

ใบความรู้ที่ 7 ดีเทอร์มิแนนต์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. สามารถคำนวณหาค่าตัวแปรไม่ทราบค่า 2 ตัวแปรได้
2. สามารถคำนวณหาค่าตัวแปรไม่ทราบค่า 3 ตัวแปรได้

เนื้อหาสาระ

ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

ในการแก้สมการทางพีชคณิตที่ค่อนข้างยุ่งยากสลับซับซ้อน สามารถที่จะทำได้ง่ายขึ้นโดยใช้หลักการของดีเทอร์มิแนนต์ มีวิธีที่นิยมใช้อยู่ 2 ลักษณะ คือ การหาค่าตัวแปรไม่ทราบค่า 2 ตัวแปร และการหาค่าตัวแปรไม่ทราบค่า 3 ตัวแปร

การหาค่าตัวแปรไม่ทราบค่า 2 ตัวแปร

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

a_{11} คือ แถวที่ 1 หลักที่ 1

a_{12} คือ แถวที่ 1 หลักที่ 2

a_{21} คือ แถวที่ 2 หลักที่ 1

a_{22} คือ แถวที่ 2 หลักที่ 2

ลักษณะของสมการที่มีตัวแปรไม่ทราบค่าสองตัวจะมีลักษณะ ดังนี้

$$ax + by = e \quad \dots\dots(1)$$

$$cx + dy = f \quad \dots\dots(2)$$

โดย x, y เป็นตัวไม่ทราบค่า

a, b, c, d เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวไม่ทราบค่า

e, f เป็นค่าคงที่

วิธีการแก้สมการโดยใช้หลักการของดีเทอร์มิแนนต์ มีดังต่อไปนี้

1. นำสมการที่ (1) และ (2) มาเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

2. หาค่าตัวร่วม D เป็นส่วน โดยการนำสัมประสิทธิ์ ของ x และ y มาหาค่าดีเทอร์มิแนนต์คูณไขว้แล้วนำค่ามารวมกัน

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

คูณลงเครื่องหมายเป็นบวก

$$\begin{vmatrix} a & \\ & d \end{vmatrix}$$

เพราะฉะนั้น ค่าของตัวร่วม D คือ

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

คูณขึ้นเครื่องหมายเป็นลบ

$$\begin{vmatrix} & b \\ c & \end{vmatrix}$$

3. หาค่าเศษ Dx โดยการนำค่าคงที่ e และ f ไปแทนในหลักที่ 1 เพื่อนำไปหาค่า x โดยใช้วิธีเดียวกับข้อ 2

$$Dx = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = ed - bf$$

4. หาค่าเศษ Dy โดยการนำค่าคงที่ e และ f ไปแทนในหลักที่ 2 เพื่อนำไปหาค่า y โดยใช้วิธีเดียวกับข้อ 2

$$Dy = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af - ce$$

ดังนั้น ค่าของ x และ y จะมีค่าเท่ากับ

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{ed - bf}{ad - cb}$$
$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{af - ce}{ad - cb}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการหาค่า x และ y

$$6x + 3y = 5 \quad \dots(1)$$

$$2x + 4y = 10 \quad \dots(2)$$

วิธีทำ นำสมการที่ (1) และ (2) มาเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (6 \times 4) - (2 \times 3) = 24 - 6 = 18$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (10 \times 3) = 20 - 30 = -10$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = (6 \times 10) - (2 \times 5) = 60 - 10 = 50$$

ดังนั้น จะได้

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-10}{18} = -0.555$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{50}{18} = 2.777$$

การหาค่าตัวแปรไม่ทราบค่า 3 ตัวแปร

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a₁₁ คือ แถวที่ 1 หลักที่ 1

a₁₂ คือ แถวที่ 1 หลักที่ 2

a₁₃ คือ แถวที่ 1 หลักที่ 3

a₂₁ คือ แถวที่ 2 หลักที่ 1

a₂₂ คือ แถวที่ 2 หลักที่ 2

a₂₃ คือ แถวที่ 2 หลักที่ 3

a₃₁ คือ แถวที่ 3 หลักที่ 1

a₃₂ คือ แถวที่ 3 หลักที่ 2

a₃₃ คือ แถวที่ 3 หลักที่ 3

ลักษณะของสมการที่มีตัวแปรไม่ทราบค่าสองตัวจะมีลักษณะ ดังนี้

$$ax + by + cz = j \quad \text{.....(1)}$$

$$dx + ey + fz = k \quad \text{.....(2)}$$

$$gx + hy + iz = l \quad \text{.....(3)}$$

โดย x, y, z เป็นตัวไม่ทราบค่า
 $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวไม่ทราบค่า
 j, k, l เป็นค่าคงที่

วิธีการแก้สมการโดยใช้หลักการของดีเทอร์มิแนนต์ มีดังต่อไปนี้

1. นำสมการที่ (1) และ (2) และ (3) มาเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

2. หาค่าตัวร่วม D เป็นส่วน โดยการนำสัมประสิทธิ์ของ x , y และ z มาหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ โดยการนำหลักที่ 1 และหลักที่ 2 มาเขียนซ้ำอีกครั้งทางด้านขวาของดีเทอร์มิแนนต์ แล้วคูณไขว้ โดยคูณลงเครื่องหมายเป็นบวก (Positive) และคูณขึ้นเครื่องหมายเป็นลบ (Negative) แล้วนำค่ามารวมกัน

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

คูณลงเครื่องหมายเป็นบวก

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

คูณขึ้นเครื่องหมายเป็นลบ

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

เพราะฉะนั้น ค่าของตัวร่วม D คือ

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} = (aei+bfh+cdg) - (gec + hfa + idb)$$

3. หาค่าเศษ D_x โดยการนำ ค่าคงที่ j , k และ l ไปแทนในหลักที่ 1 เพื่อนำไปหาค่า x โดยใช้วิธีเดียวกับข้อ 2

$$D_x = \begin{vmatrix} j & b & c & j & b \\ k & e & f & k & e \\ l & h & i & l & h \end{vmatrix} = (jei + bfl + ckg) - (lec + gfj + jkb)$$

4. หาค่าเศษ D_y โดยการนำ ค่าคงที่ j , k และ l ไปแทนในหลักที่ 2 เพื่อนำไปหาค่า y โดยใช้วิธีเดียวกับข้อ 2

$$Dy = \begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & j \\ d & k \\ g & l \end{vmatrix} = (aki + jfg + cdl) - (gkc + lfa + idj)$$

5. หาค่าเศษ Dz โดยการนำ ค่าคงที่ j , k และ l ไปแทนในหลักที่ 3 เพื่อนำไปหาค่า z โดยใช้วิธีเดียวกับข้อ 2

$$Dz = \begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix} = (acl + bkg + jd h) - (gcj + hka + ldb)$$

ดังนั้น จะได้

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{(jei + bfl + ckg) - (lec + gfj + jkb)}{(aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)}$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{(aki + jfg + cdl) - (gkc + lfa + idj)}{(aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)}$$

$$z = \frac{Dz}{D} = \frac{(acl + bkg + jd h) - (gcj + hka + ldb)}{(aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการหาค่า x , y และ z

$$x + 2y + 3z = 12 \quad \dots(1)$$

$$4x + 5y + 6z = 14 \quad \dots(2)$$

$$7x + 8y + 10z = 16 \quad \dots(3)$$

วิธีทำ นำสมการที่ (1) , (2) และ (3) มาเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = (50 + 84 + 96) - (105 + 48 + 80) = 230 - 233 = -3$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 3 \\ 14 & 5 & 6 \\ 16 & 8 & 10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 14 & 5 \\ 16 & 8 \end{vmatrix} = (600+192+336) - (240+576+280) = 32$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 3 \\ 4 & 14 & 6 \\ 7 & 16 & 10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 4 & 14 \\ 7 & 16 \end{vmatrix} = (140+504+192) - (294+96+480) = -34$$

$$Dz = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 4 & 5 & 14 \\ 7 & 8 & 16 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (80+196+384) - (420+112+128) = 0$$

ดังนั้น จะได้

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{32}{-3} = -10.667$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{-34}{-3} = 11.333$$

$$z = \frac{Dz}{D} = \frac{0}{-3} = 0$$