ปริมาณเชิงซ้อนและเฟสเซอร์ไดอะแกรม

1. ปริมาณเชิงซ้อน

1.1 ความหมายของปริมาณเชิงซ้อน

ปริมาณเชิงซ้อน (Complex Number) คือ ตัวเลขที่ประกอบด้วยจำนวนบวกหรือลบ ซึ่งอยู่บนแกน x กับจำนวนจินตภาพซึ่งอยู่บนแกน y รูปแบบของปริมาณเชิงซ้อนจะเขียนดังนี้

$$Z = x \pm jy$$

เมื่อ Z = ปริมาณเชิงซ้อน

x = จำนวนจริง (Real Number)

y = จำนวนจินตภาพ (Imaginary Number)

$j = \sqrt{-1}$

และ $j^2 = -1$

1.2 รูปแบบปริมาณเชิงซ้อน

แบ่งออกเป็น 4 รูปแบบ คือ

1.2.1 รูปแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก (Rectangular Form) ประกอบด้วยจำนวนซึ่งอยู่บนแนวนอน โดยมีเครื่องหมาย + และ − บอกทิศทาง ส่วนตัวเลขจะบอกขนาดและจำนวนจินตภาพซึ่งอยู่บนแนวตั้ง รูปแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก คือ

$$Z = \pm x \pm j\,y$$

เมื่อ Z = ปริมาณเชิงซ้อน

$\pm x$ = จำนวนจริงบนแนวนอน มีค่าเป็นบวกหรือลบก็ได้

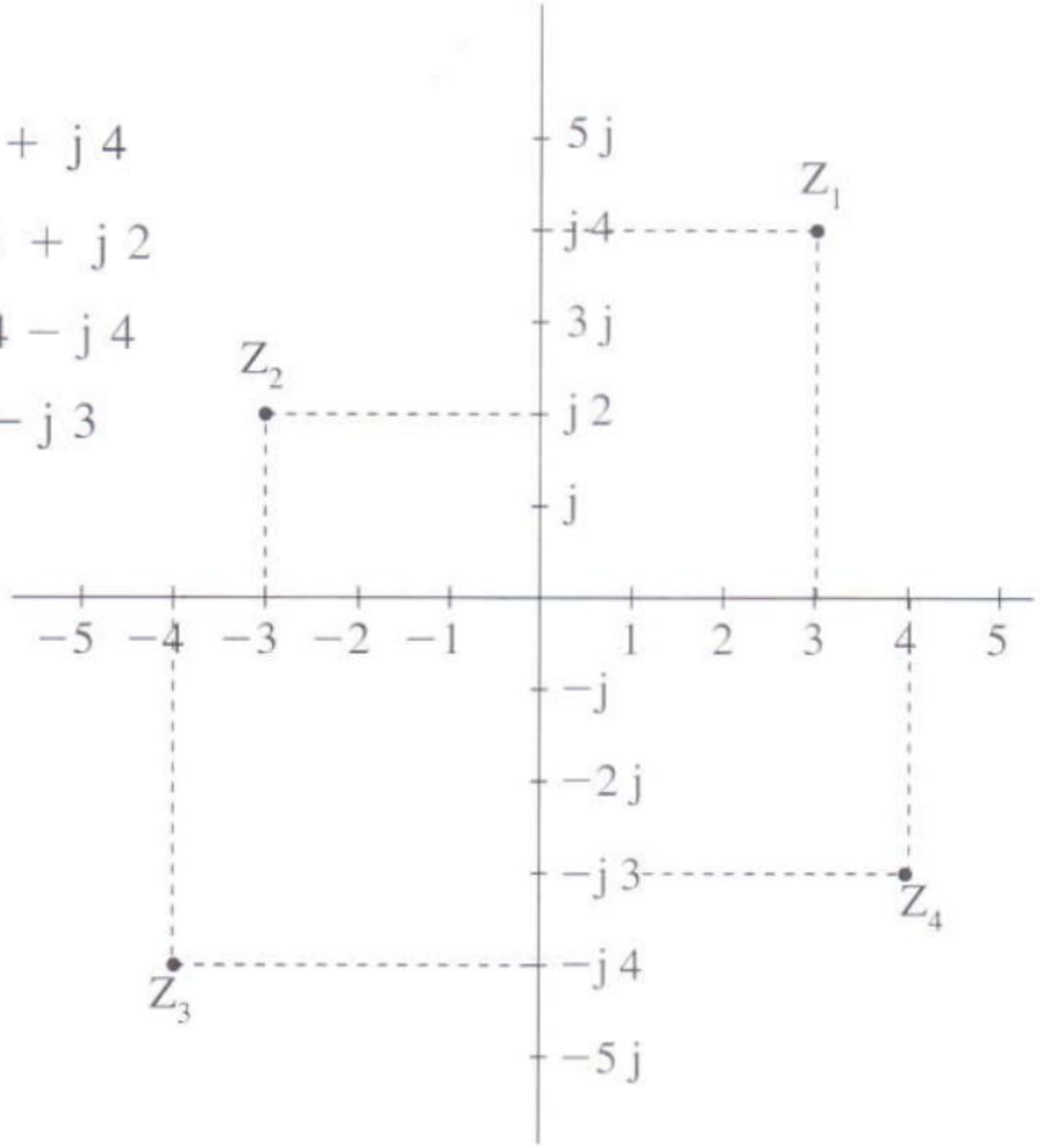
$\pm j\,y$ = จำนวนจินตภาพบนแนวตั้ง มีค่าเป็นบวกหรือลบก็ได้

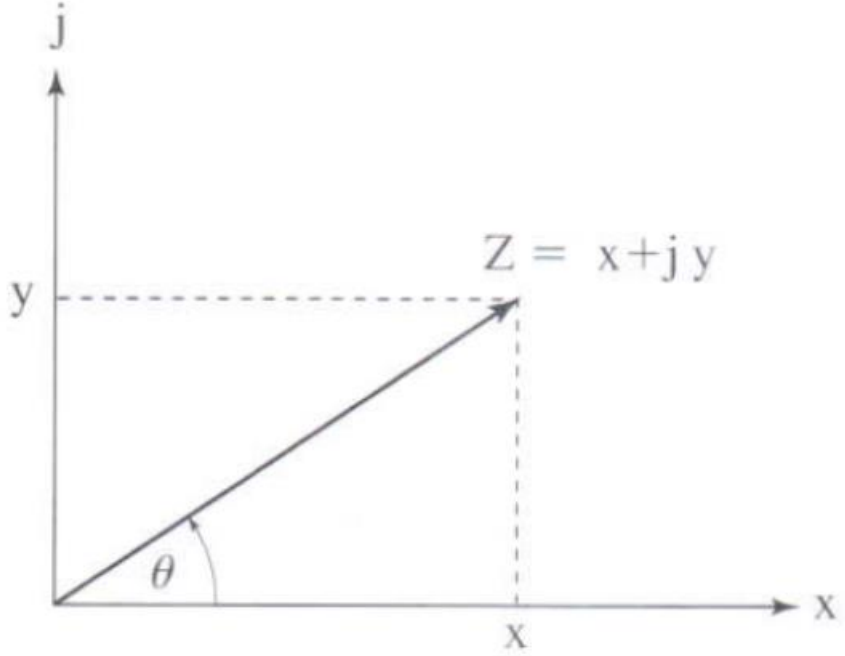
$Z_1 = 3 + j\,4$

$Z_2 = -3 + j\,2$

$Z_3 = -4 - j\,4$

$Z_4 = 4 - j\,3$





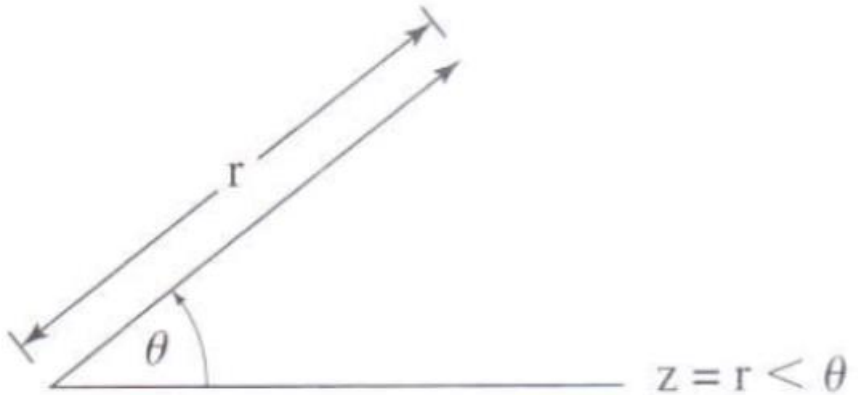
1.2.2 รูปแบบเชิงขั้ว (Polar Form) ประกอบด้วยขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ มีหน่วยเป็นองศา

รูปแบบเชิงขั้ว คือ $Z = \pm r\angle \pm \theta^{\circ}$

เมื่อ Z = ปริมาณเชิงซ้อน

= ขนาดของปริมาณแวกเตอร์ หรือค่ามอดุลัส (Modulus) หรือค่าสัมบูรณ์ของ Z โดยที่ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

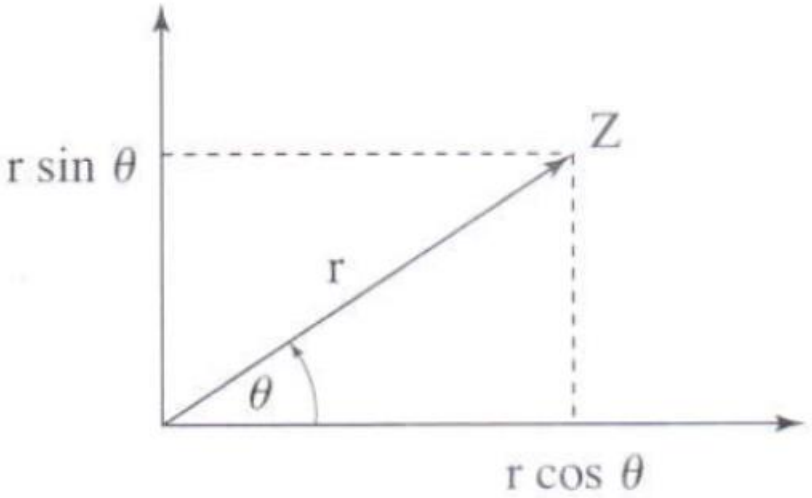
$\pm \theta$ = มุมหรือทิศทางของปริมาณเวกเตอร์ มีหน่วยเป็นองศา โดยที่ $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$



1.2.3 รูปแบบตรีโกณมิติ (Trigonometric Form) ประกอบด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีค่าฟังก์ชันโคไซน์และไซน์ร่วมอยู่ด้วยกัน มีรูปแบบดังนี้

$$Z = \pm r\cos\theta \pm jr\sin\theta$$

$$Z = \pm r(\cos\theta \pm j\sin\theta)$$



1.2.4 รูปแบบชี้กำลัง (Exponential Form) เป็นรูปแบบเลขยกกำลัง คือ

$$Z = \pm re^{\pm j\theta}$$

เมื่อ r = ขนาดของปริมาณเวกเตอร์

θ = มุมหรือทิศทางของปริมาณเวกเตอร์ มีหน่วยเป็นเรเดียน หรือเป็นเลขทศนิยมของพาย π หรือเศษส่วนของพาย เช่น $z_1 = 2e^{j\,3.14}$ หรือ $Z_z = -3e^{j\frac{\pi}{3}}$

1.3 คอนจูเกตปริมาณเชิงซ้อน (Conjugate of Complex Number)

การทำคอนจูเกตปริมาณเชิงซ้อน (Conjugate of Complex Number) คือ การใส่เครื่องหมายดอกจัน (*) ด้านขวาบนของ Z คือ Z^* ปริมาณเชิงซ้อนที่ทำคอนจูเกตจะมีขนาดเท่าเดิม แต่ทิศทางจะแตกต่างกัน แยกพิจารณาแต่ละรูปแบบได้ดังนี้

1.3.1 รูปแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก

$$Z_1 = 3 + j4$$

$$Z_1^* = 3 - j4$$

$$Z_2 = -2 - j5$$

$$Z_2^* = -2 + j5$$

1.3.2 รูปแบบเชิงขั้ว

$$Z_1 = 5 \angle 53.13^\circ$$

$$Z_1^* = 5 \angle -53.13^\circ$$

$$Z_2 = -2 \angle -36.86^\circ$$

$$Z_2^* = -2 \angle 36.86^\circ$$

1.3.3 รูปแบบตรีโกณมิติ

$$Z_1 = 5 (\cos 10^\circ + j \sin 10^\circ)$$

$$Z_1^* = 5 (\cos 10^\circ - j \sin 10^\circ)$$

1.3.4 รูปแบบชี้กำลัง

$$Z_1 = 5e^{j\,3.14}$$

$$Z_1^* = 5e^{-j\,3.14}$$

1.4 การแปลงรูปแบบปริมาณเชิงซ้อน

1.4.1 การแปลงรูปแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากไปเป็นรูปแบบเชิงขั้ว

แปลงจากรูปแบบ $x + j\,y$ ให้เป็นรูปแบบ $r \angle\theta$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

ตัวอย่าง $Z = 3 + j\,4$

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} =$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) =$$

$$3 + j\,4 =$$

1.4.2 การแปลงรูปแบบเชิงขั้วไปเป็นรูปแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก

แปลงจากรูปแบบ $r \angle\theta$ ให้เป็น รูปแบบ $x + j\, y$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

ตัวอย่าง $Z = 5 \angle 53.13^\circ$

$x = 5 \cos 53.13^\circ =$

$y = 5 \sin 53.13^\circ =$

$5 \angle 53.13^\circ =$

1.5 การบวกและการลบปริมาณเชิงซ้อน

การบวกและการลบปริมาณเชิงซ้อน จะสามารถบวกหรือลบกันได้ก็ต่อเมื่ออยู่ในรูปแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก (Rectangular Form) เช่น $Z_1 = 3 + j\,4$ และ $Z_2 = 5 - j\,2$

$$Z_1 + Z_2 = (3 + j\,4) + (5 - j\,2)$$

$$=$$

$$Z_1 - Z_2 = (3 + j\,4) - (5 - j\,2)$$

$$=$$

1.6 การคูณและการหารปริมาณเชิงซ้อน

1.6.1 รูปแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก

1) การคูณ จะนำแต่ละพจน์ของเทอมแรกคูณเข้ากับทุกพจน์ของอีกเทอมหนึ่ง

$Z_1 = 4 + j$ และ $Z_2 = 2 + j\,3$

$Z_1Z_2 = (4 + j)(2 + j\,3)$

$=$

$=$

$=$

2) *การหาร* จะนำคอนจูเกตตัวหารมาคูณทั้งเศษและส่วน

$Z_1 = 4 + j$ และ $Z_2 = 2 + j\,3$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \times \frac{Z_2^*}{Z_2^*}$$

$$= \frac{(4 + j)}{(2 + j\,3)} \times \frac{(2 - j\,3)}{(2 - j\,3)}$$

=

=

1.6.2 รูปแบบเชิงขั้ว

1) การคูณ จะนำค่ามอดุลัสมาคูณกัน สำหรับมุม θ จะนำมาบวกกัน เช่น $Z_1 = 5 \angle 53.14°$ และ $Z_2 = 2 \angle 20°$

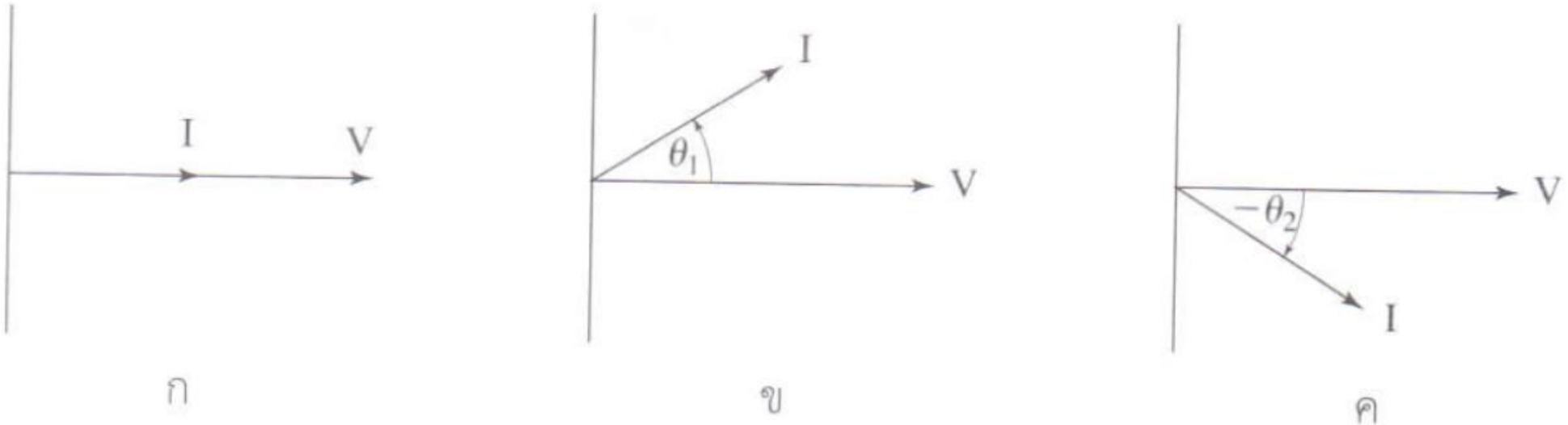
$$Z_1 Z_2 = 5 \times 2 \angle 53.14° + 20°$$

2) การหาร จะนำค่ามอดุลัสมาหารกัน สำหรับมุม θ จะนำมาลบกัน

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{5}{2} \angle 53.13° - 20$$

2. เฟสเซอร์ไดอะแกรม

เฟสเซอร์ไดอะแกรม (Phasor Diagram) หรือที่นิยมเรียกว่า เฟสเซอร์ คือ การเขียนเส้นตรงที่มีทั้งขนาดและทิศทาง หรือเป็นการหมุนของเวกเตอร์ที่มีขนาดคงที่และความเร็วเชิงมุมคงที่ สำหรับขนาดแรงดันไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าที่ใช้เขียนเฟสเซอร์ไดอะแกรมนิยมเขียนด้วยค่า rms และเขียนด้วยอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ คือ V และ I

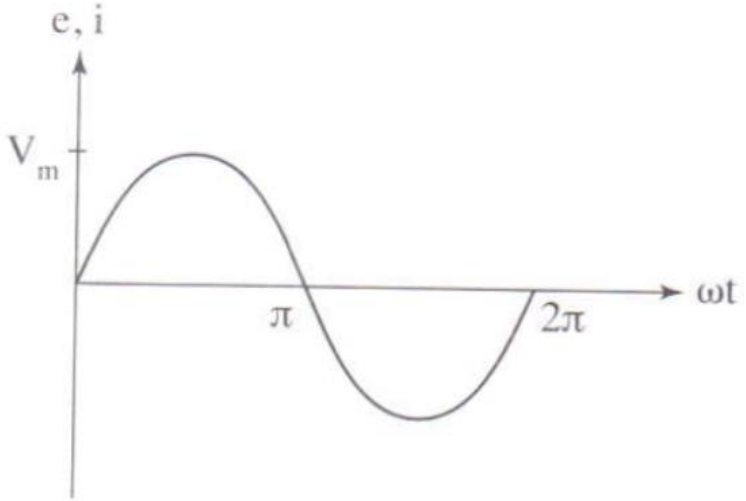


ก ข ค

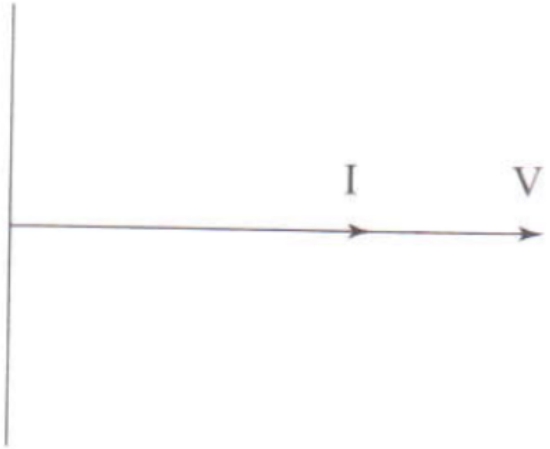
แสดงการเขียนเส้นเฟสเซอร์ไดอะแกรม

2.1 การเขียนสมการชั่วขณะ

2.1.1 รูปคลื่นไซน์ของแรงดันหรือกระแสไฟฟ้าเริ่มต้นที่ศูนย์



ก. รูปคลื่น



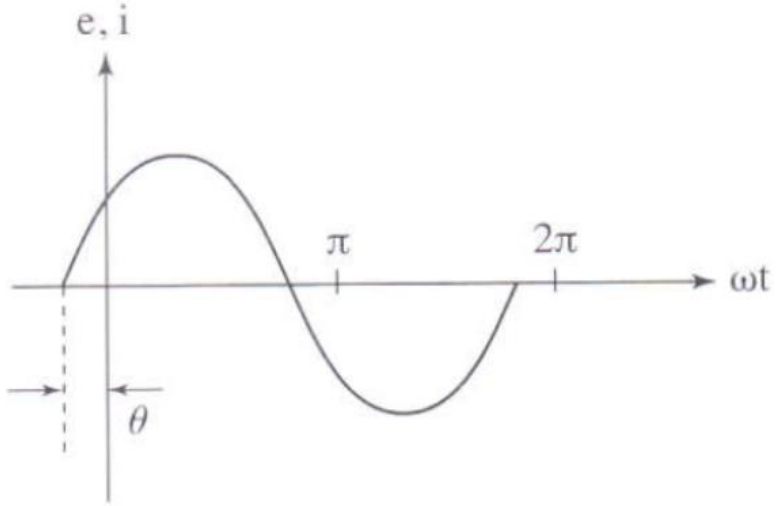
ข. เฟสเซอร์ไดอะแกรม

สมการแรงดันไฟฟ้าชั่วขณะ คือ $e = V_m \sin(\omega t + 0) = V_m \sin \omega t$

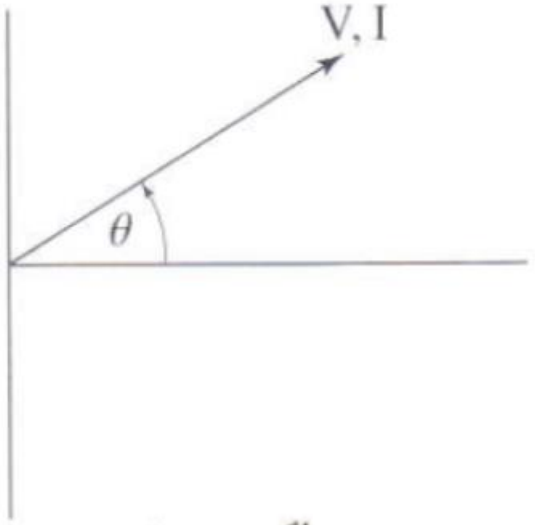
สมการกระแสไฟฟ้าชั่วขณะ คือ $i = I_m \sin(\omega t + 0) = I_m \sin \omega t$

สมการเฟสเซอร์ (เขียนด้วยค่า rms) คือ $V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$ $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$

2.1.2 รูปคลื่นไซน์ของแรงดันไฟฟ้าหรือกระแสไฟฟ้าที่เริ่มต้นก่อนจุดศูนย์



ก. รูปคลื่น



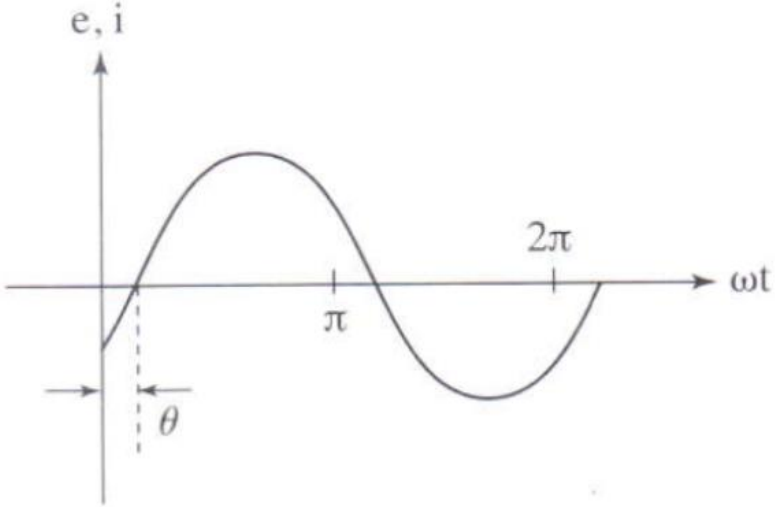
ข. เฟสเซอร์ไดอะแกรม

สมการแรงดันไฟฟ้าชั่วขณะ คือ $e = V_m \sin(\omega t + \theta)$

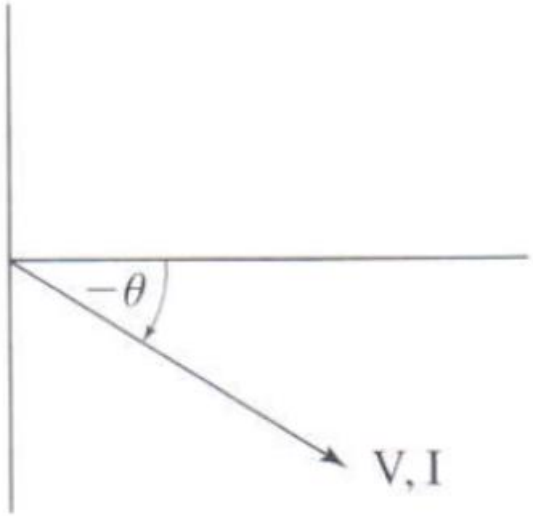
สมการกระแสไฟฟ้าชั่วขณะ คือ $i = I_m \sin(\omega t + \theta)$

สมการเฟสเซอร์ (เขียนด้วยค่า rms) คือ $V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle\theta^\circ$ $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle\theta^\circ$

2.1.3 รูปคลื่นไซน์ของแรงดันไฟฟ้าหรือกระแสไฟฟ้าที่เริ่มต้นหลังจุดศูนย์



ก. รูปคลื่น



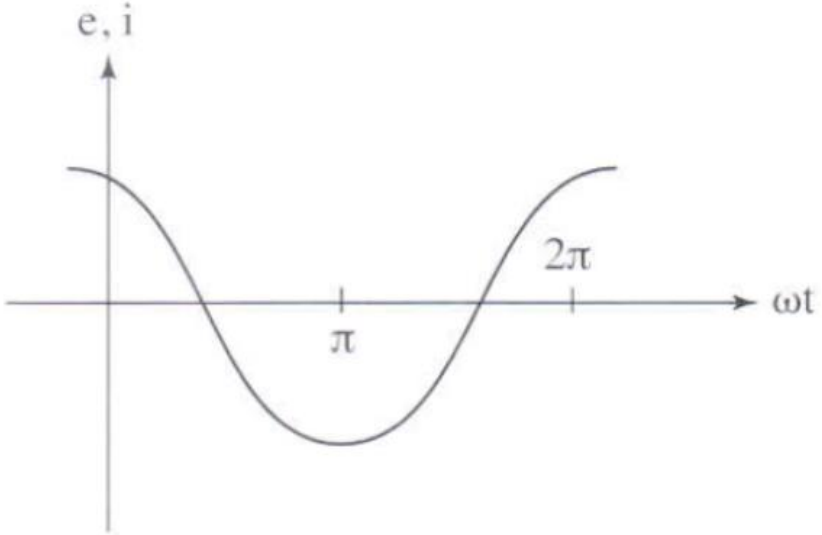
ข. เฟสเซอร์ไดอะแกรม

สมการแรงดันไฟฟ้าชั่วขณะ คือ $e = V_m \sin(\omega t - \theta)$

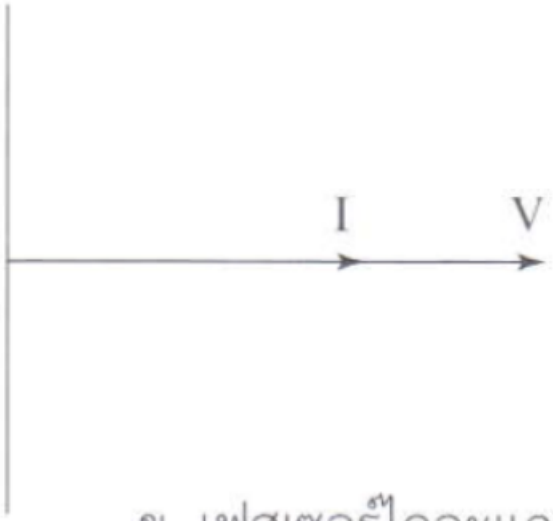
สมการกระแสไฟฟ้าชั่วขณะ คือ $i = I_m \sin(\omega t - \theta)$

สมการเฟสเซอร์ (เขียนด้วยค่า rms) คือ $V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle -\theta^\circ \qquad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle -\theta^\circ$

2.1.4 รูปคลื่นโคไซน์ของแรงดันไฟฟ้าหรือกระแสไฟฟ้าเริ่มต้นที่ศูนย์



ก. รูปคลื่น



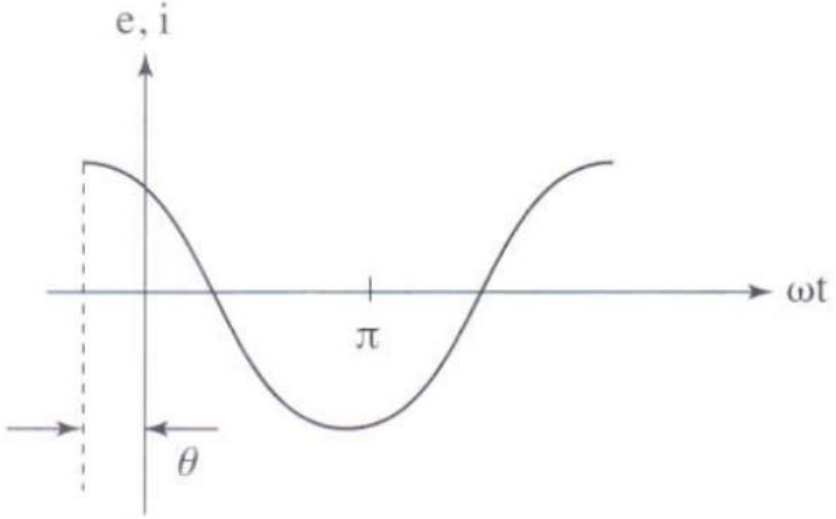
ข. เฟสเซอร์ไดอะแกรม

สมการแรงดันไฟฟ้าชั่วขณะ คือ $e = V_m \cos(\omega t + 0) = V_m \cos \omega t$

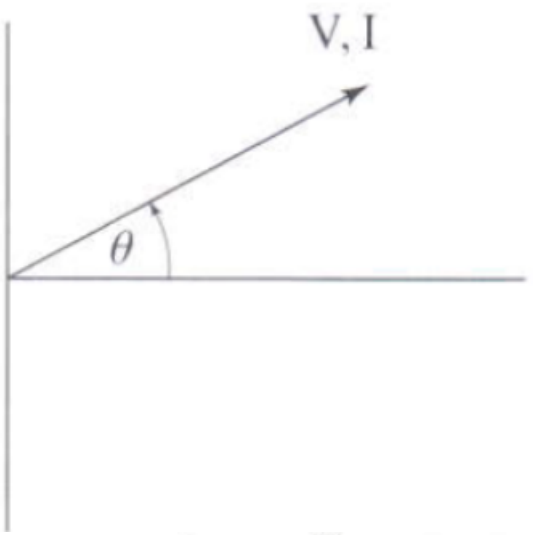
สมการกระแสไฟฟ้าชั่วขณะ คือ $i = I_m \cos(\omega t + 0) = I_m \cos \omega t$

สมการเฟสเซอร์ (เขียนด้วยค่า rms) คือ $V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0 \qquad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle 0$

2.1.5 รูปคลื่นโคไซน์ของแรงดันไฟฟ้าหรือกระแสไฟฟ้าที่เริ่มต้นก่อนจุดศูนย์



ก. รูปคลื่น



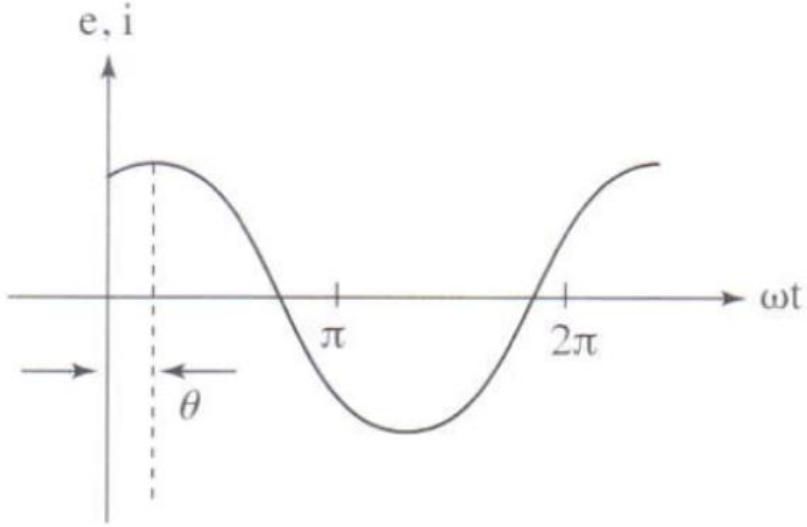
ข. เฟสเซอร์ไดอะแกรม

สมการแรงดันไฟฟ้าชั่วขณะ คือ $e = V_m \cos(\omega t + \theta)$

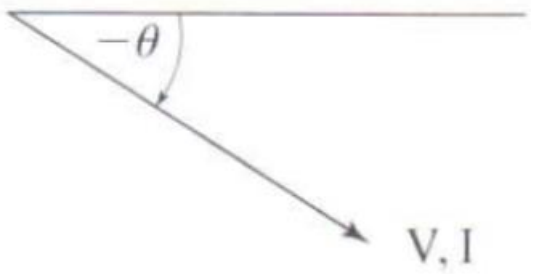
สมการกระแสไฟฟ้าชั่วขณะ คือ $i = I_m \cos(\omega t + \theta)$

สมการเฟสเซอร์ (เขียนด้วยค่า rms) คือ $V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle\theta^\circ \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle\theta^\circ$

2.1.6 รูปคลื่นโคไซน์ของแรงดันไฟฟ้าหรือกระแสไฟฟ้าที่เริ่มต้นหลังจุดศูนย์



ก. รูปคลื่น



ข. เฟสเซอร์ไดอะแกรม

สมการแรงดันไฟฟ้าชั่วขณะ คือ $e = V_m \cos(\omega t - \theta)$

สมการกระแสไฟฟ้าชั่วขณะ คือ $i = I_m \cos(\omega t - \theta)$

สมการเฟสเซอร์ (เขียนด้วยค่า rms) คือ $V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle -\theta^\circ \qquad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle -\theta^\circ$

2.2 มุมเฟส (Phase Angle)

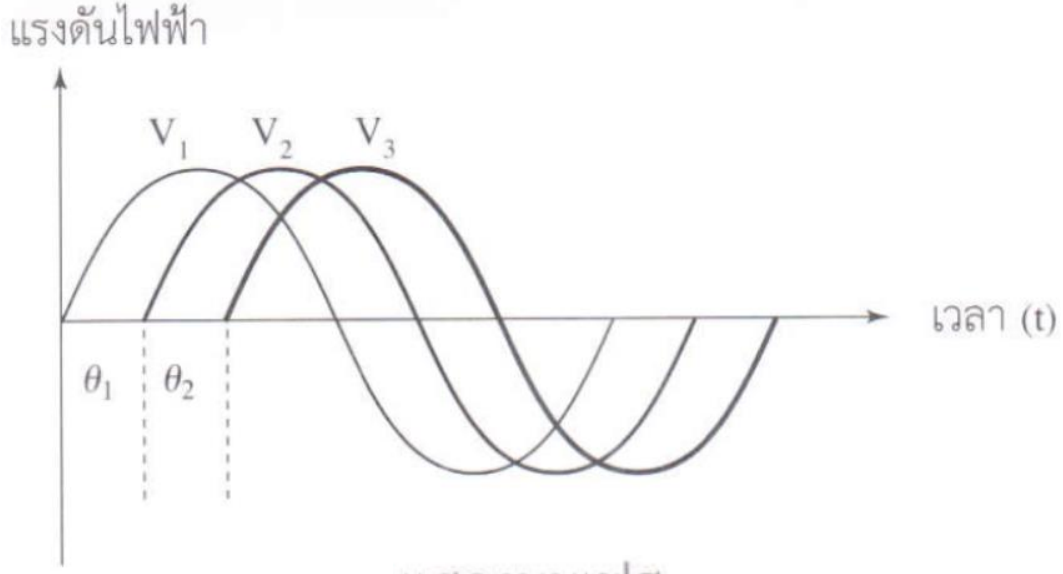
มุมเฟส (Phase Angle) เป็นการเปรียบเทียบรูปคลื่นสัญญาณตั้งแต่สองรูปคลื่นขึ้นไป ได้แก่ รูปคลื่นแรงดันไฟฟ้ากับรูปคลื่นแรงดันไฟฟ้า หรือระหว่างรูปคลื่นแรงดันไฟฟ้ากับรูปคลื่นกระแสไฟฟ้า หรือระหว่างรูปคลื่นกระแสไฟฟ้าด้วยกัน ทั้งนี้เพราะการเปลี่ยนแปลงของเวลาทำให้ระยะทางเชิงมุมของรูปคลื่นไฟฟ้ากระแสสลับเปลี่ยนไป

มุมต่างเฟสระหว่าง V_1 กับ V_2 เท่ากับมุม θ_1

มุมต่างเฟสระหว่าง V_2 กับ V_3 เท่ากับมุม θ_2

มุมต่างเฟสระหว่าง V_1 กับ V_3 เท่ากับมุม $\theta_1 + \theta_2$

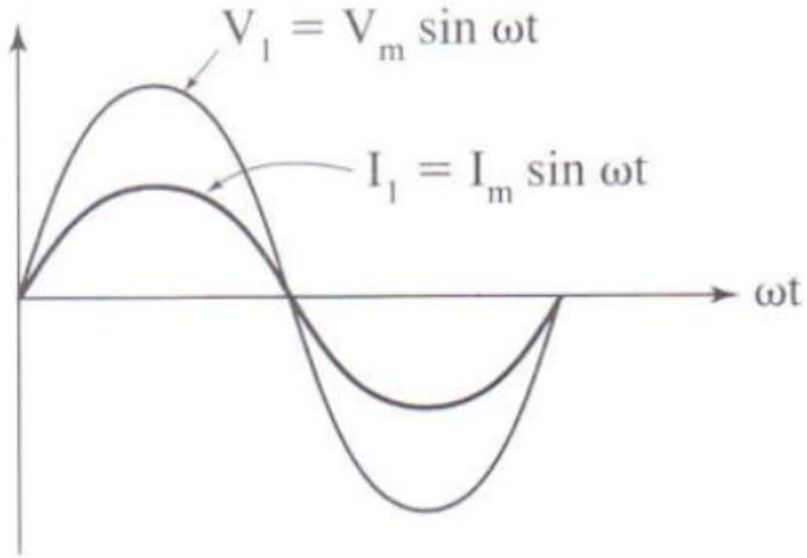
เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างกระแสไฟฟ้ากับแรงดันไฟฟ้า จะเกิดสภาวะที่เรียกว่า การร่วมเฟสกันและการต่างเฟสกัน

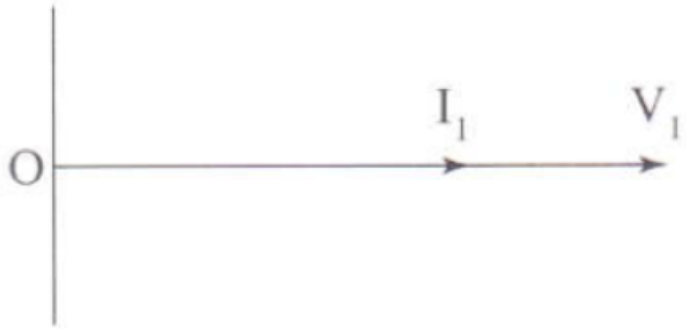


แสดงมุมเฟส

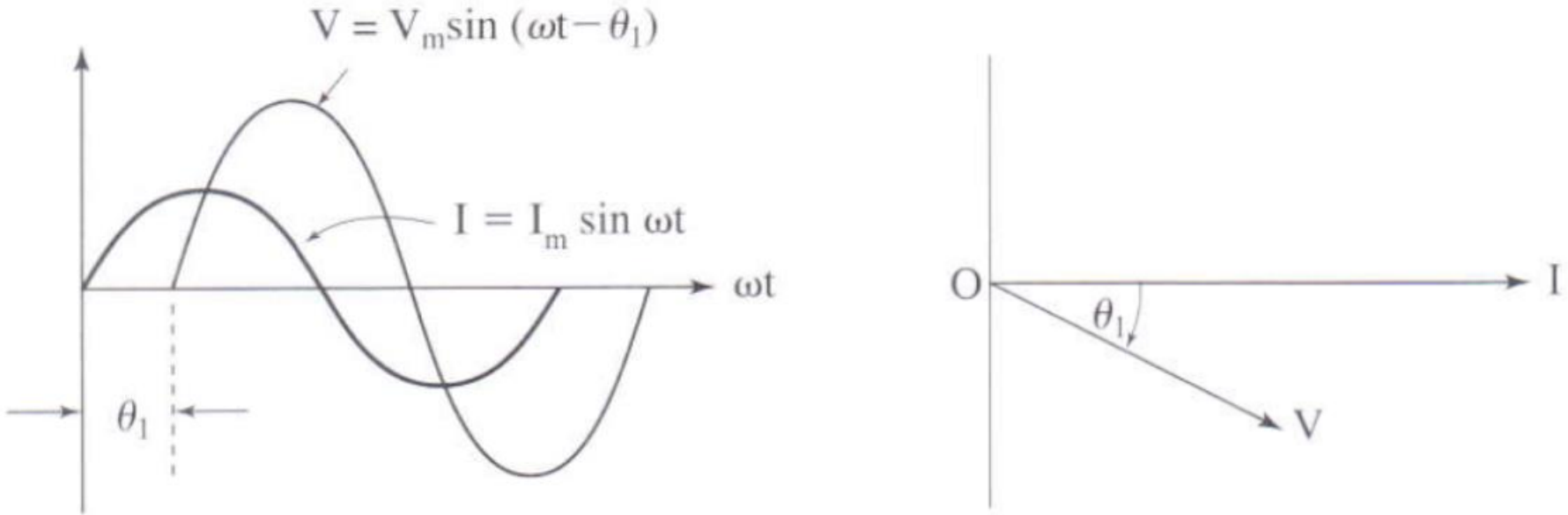
2.2.1 การร่วมเฟสกัน (Inphase)

แรงดันกระแสไฟฟ้า

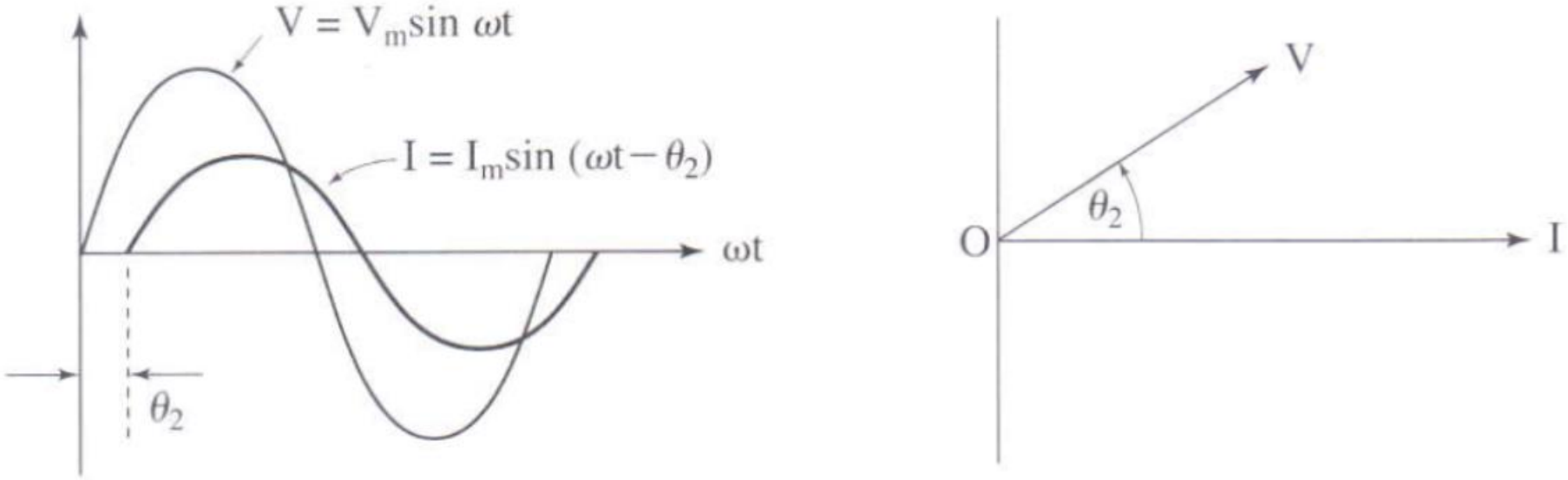




2.2.2 การต่างเฟสกัน (Difference Phase)

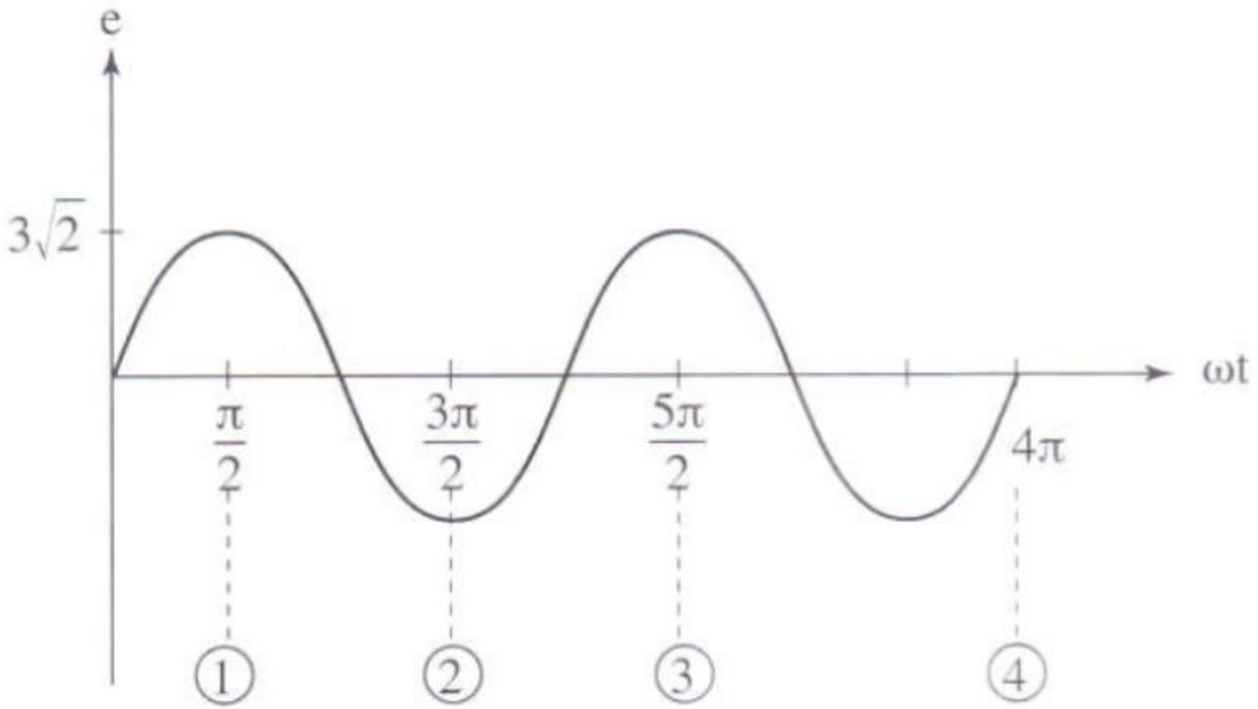


แสดงรูปคลื่นกระแสไฟฟ้านำหน้าแรงดันไฟฟ้า เป็นมุม θ_1



แสดงรูปคลื่นกระแสไฟฟ้าล้าหลังแรงดันไฟฟ้า เป็นมุม θ_2

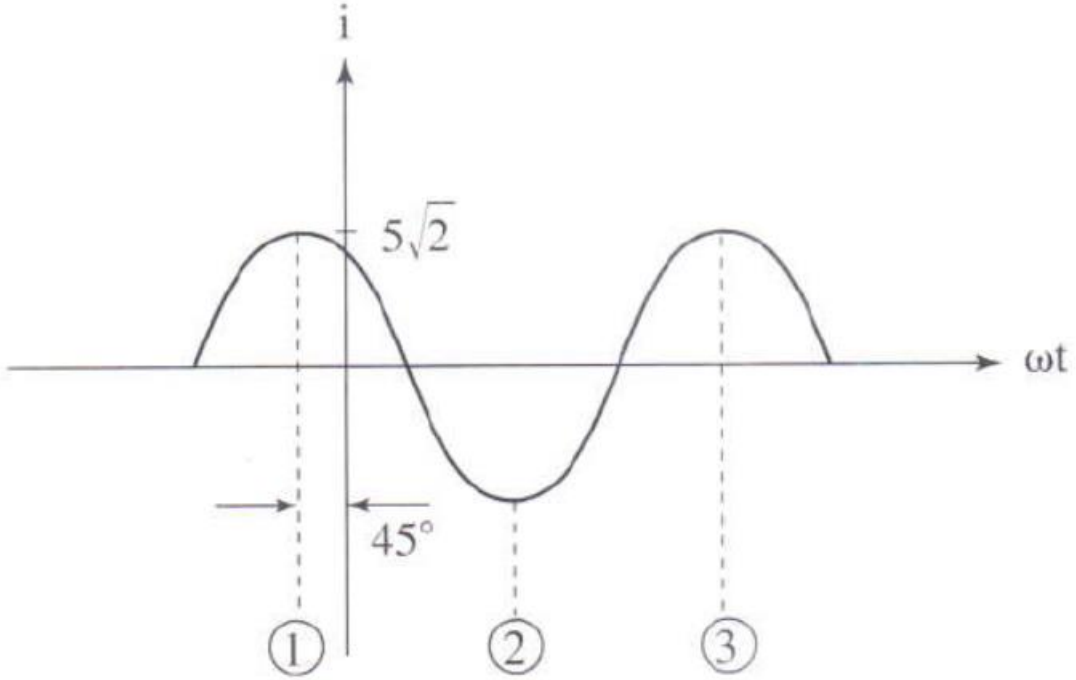
ตัวอย่างที่ 2.1 จากรูปคลื่นไซน์ที่กำหนดให้ จงเขียนสมการแรงดันไฟฟ้าชั่วขณะและสมการเฟสเซอร์ที่ตำแหน่งต่างๆ



วิธีทำ ค่าแรงดันไฟฟ้าชั่วขณะจะพิจารณามุมที่ตำแหน่งที่ 1 ถึง 4 สำหรับสมการเฟสเซอร์จะใช้ค่า rms คือต้องหารด้วย $\sqrt{2}$

ตำแหน่งที่	สมการแรงดันไฟฟ้าชั่วขณะ	สมการเฟสเซอร์
1	$e = 3\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ $e = 3\sqrt{2}\sin(\omega t - 90^\circ)$	$V = 3 \angle -90^\circ$
2	$e = 3\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{3\pi}{2})$ $e = 3\sqrt{2}\sin(\omega t - 270^\circ)$	$V = -3 \angle -270^\circ$
3	$e = 3\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{5\pi}{2})$ $e = 3\sqrt{2}\sin(\omega t - 450^\circ)$	$V = 3 \angle -450^\circ$
4	$e = 3\sqrt{2}\sin(\omega t - 4\pi)$ $e = 3\sqrt{2}\sin(\omega t - 720^\circ)$	$V = 3 \angle -720^\circ$

ตัวอย่างที่ 2.2 จากรูปคลื่นโคไซน์ที่กำหนดให้ จงเขียนสมการกระแสไฟฟ้าชั่วขณะและสมการเฟสเซอร์ที่ตำแหน่งต่างๆ



วิธีทำ ค่ากระแสไฟฟ้าชั่วขณะจะพิจารณามุมที่ตำแหน่งที่ 1 ถึง 3 สำหรับสมการเฟสเซอร์จะใช้ค่า rms คือต้องหารด้วย $\sqrt{2}$

ตำแหน่งที่	สมการกระแสไฟฟ้าชั่วขณะ	สมการเฟสเซอร์
1	$i = 5\sqrt{2}\cos(\omega t + 45^\circ)$	$I = 5 \angle 45^\circ$
2	$i = -5\sqrt{2}\cos(\omega t - 135^\circ)$	$I = -5 \angle -135^\circ$
3	$i = 5\sqrt{2}\cos(\omega t - 315^\circ)$	$I = 3 \angle -315^\circ$

ตัวอย่างที่ 2.3 จงใช้เฟสเซอร์ไดอะแกรมคำนวณหาผลบวกของกระแสไฟฟ้า $i_1 = 14.14 \sin(\omega t + 13.2°)$ A

และ $i_2 = 8.95 \sin(\omega t + 121.6°)$ A

กระแสไฟฟ้าที่จะใช้เขียนสมการเฟสเซอร์ คือ กระแสไฟฟ้าอาร์ เอ็ม เอส (I_{rms}) นั่นคือ

$$I_1 = \frac{14.14}{\sqrt{2}} \angle 13.2° \text{ A} =$$

$$I_2 = \frac{8.95}{\sqrt{2}} \angle 121.6° \text{ A} =$$

$$I_1 + I_2 =$$

$$I_1 + I_2 =$$

ตัวอย่างที่ 2.4 จงหาผลต่างของกระแสไฟฟ้า $i_1 - i_2$ เมื่อ $i_1 = 40 \cos(\omega t + 63)$ A และ $i_2 = 28 \cos(\omega t + 110)$ A

กระแสไฟฟ้าที่จะใช้เขียนสมการเฟสเซอร์ คือ กระแสไฟฟ้าอาร์ เอ็ม เอส (I_{rms})

$$I_1 = \frac{40}{\sqrt{2}} \angle 63^\circ \text{ A} \quad =$$

$$I_2 = \frac{28}{\sqrt{2}} \angle 110^\circ \text{ A}$$

$$I_1 - I_2 =$$

$$i_1 - i_2 =$$

ตัวอย่างที่ 2.5 จงหาผลบวกของรูปสัญญาณแรงดันไฟฟ้า $V_1 + V_2$ เมื่อ $V_1 = 220 \sin(\omega t + 54°)$ V และ $V_2 = 68.5 \cos(\omega t - 147.3°)$ V โดยแสดงผลบวกให้อยู่ในฟังก์ชันไซน์

เปลี่ยนแรงดันไฟฟ้า v_2 ให้อยู่ในฟังก์ชันไซน์ด้วยการบวกมุมเพิ่มเข้าไป 90 องศา

$$V_2 = 68.5 \sin(\omega t - 147.3° + 90°)$$

$$= 68.5 \sin(\omega t - 57.3°)$$

$$V_1 = \frac{220}{\sqrt{2}} \angle 54° \text{ v} =$$

$$=$$

$$V_2 = \frac{68.5}{\sqrt{2}} \angle -57.3° \text{ V} =$$

$$=$$

$$V_1 + V_2 =$$

$$V_1 + V_2 =$$

$$=$$

กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจ

1. จงแปลงปริมาณเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้เป็นรูปแบบเชิงขั้ว

1.1 $5 + j\,8$ .....

.....

.....

1.2 $6 - j\,9$ .....

.....

1.3 $-3 + j\,12$ .....

.....

1.4 $-2 - j\,3$ .....

.....

2. จงแปลงปริมาณเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้เป็นรูปแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก

2.1 $6 \angle 30°$ .....

.....

.....

2.2 $10 \angle -45°$ .....

.....

.....

2.3 $-7.5 \angle 18.2°$ .....

.....

.....

2.4 $-5.3 \angle -28.2°$ .....

.....

.....

3. จงตอบคำถามต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้

$Z_1 = 2 + j\,3$ $Z_2 = 4 + j\,5$

$Z_3 = -6 + j\,7$ $Z_4 = -8 - j\,9$

$Z_5 = 10\ \angle 30^\circ$ $Z_6 = 5\ \angle -60^\circ$

3.1 $Z_1 + Z_2$ = ...

$Z_2 + Z_3$ = ...

$Z_3 + Z_4$ = ...

$Z_3 - Z_1$ = ...

$Z_2 - Z_4$ = ...

$Z_1 = 2 + j\,3$ $Z_2 = 4 + j\,5$

$Z_3 = -6 + j\,7$ $Z_4 = -8 - j\,9$

$Z_5 = 10\ \angle 30°$ $Z_6 = 5\ \angle -60°$

3.2 $Z_2\,Z_3$ = ...

.....

$Z_5\,Z_6$ = ...

.....

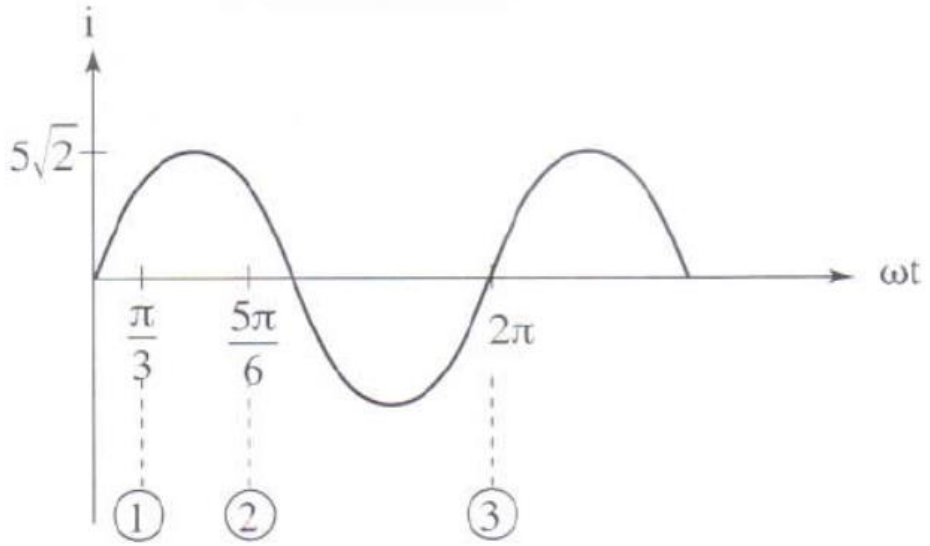
$Z_3 \div Z_1$ = ...

.....

$Z_6 \div Z_5$ = ...

.....

4. จงเขียนสมการแรงดันไฟฟ้าชั่วขณะและสมการเฟสเซอร์



.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. จงใช้เฟสเซอร์ไดอะแกรมคำนวณหาผลบวกของแรงดันไฟฟ้า

$v_1 = 20 \sin(\omega t + 32.21^\circ)$ V และ

$v_2 = 7.33 \sin(\omega t + 99.43^\circ)$ V

สรุป

การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ (AC Circuit Analysis) มักจะเกี่ยวข้องกับมุมเฟสของอิมพีแดนซ์ (Z) กระแสไฟฟ้า (I) และแรงดันไฟฟ้า (V) การหาคำตอบด้วยวิธีการทางเวกเตอร์นั้นมีขั้นตอนมาก อาจทำให้สับสนและผิดพลาดได้ ส่วนใหญ่จึงคำนวณด้วยทฤษฎีปริมาณเชิงซ้อนร่วมกับเฟสเซอร์ไดอะแกรม อันจะทำให้มองเห็นทิศทางและมุมเฟสที่เกิดขึ้นจากผลของโหลดในวงจรนั้นๆ ดังนั้นการทำความเข้าใจรูปแบบและการคำนวณเชิงซ้อนลักษณะต่างๆ จะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจธรรมชาติของไฟฟ้ากระแสสลับได้ดี นอกจากนี้ผู้เรียนสามารถฝึกทักษะทางการใช้เครื่องคิดเลขในการเปลี่ยนรูปแบบปริมาณเชิงซ้อนได้อย่างง่ายๆ