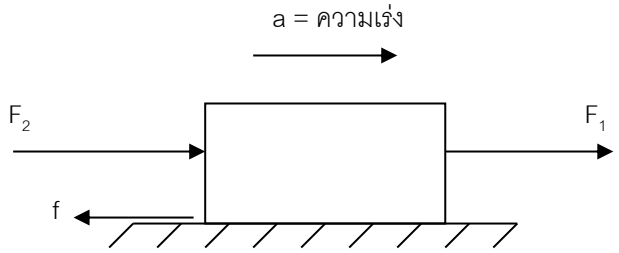
เวกเตอร์

1. เวกเตอร์และสเกลาร์

ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantity) คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง จึงจะได้ความหมายที่ชัดเจน เช่น แรง ความเร็ว น้ำหนัก ความเร่ง โมเมนต์ การขจัด สนามแม่เหล็ก ความดัน

ปริมาณสเกลาร์ (Scalar quantity) คือ ปริมาณที่บอกขนาดเพียงอย่างเดียวก็สามารถเข้าใจถึงความหมายที่ชัดเจน เช่น มวล พื้นที่ ปริมาตร เป็นต้นซึ่งเราจะเห็นว่าปริมาณเวกเตอร์นั้นจำเป็นต้องมีการบอกถึงทิศทาง ซึ่งในการคำนวณนั้นเราจำเป็นต้องสมมติให้ปริมาณเวกเตอร์ที่ไปด้านหนึ่งเป็นบวก และถ้าย้อนกลับอีกด้านเราจะสมมติให้เป็นลบ ซึ่งในการคำนวณนั้นเราจะต้องยึดถือหลักการนี้ให้ดี เพราะถ้าเมื่อเราสมมติให้ปริมาณที่กระทำด้านใดเป็นบวกแล้ว ตัวต่อๆไปก็จะต้องยึดถือทิศทางด้านนั้นเสมอไปในการคำนวณ เพราะถ้าในการคำนวณโจทย์ใดๆแล้ว เรากลับค่าสลับกันไปมาจะทำให้ค่าที่คำนวณได้นั้นผิดพลาดทันที เช่น ในตัวอย่างต่อไปนี้



รูปที่ 1.1

จากรูปที่ 1.1 เราจะเห็นว่ามีแรงกระทำต่อวัตถุ 2 แรง คือ แรง F_1 , F_2 และมีแรงเสียดทานเกิดขึ้นกับผิววัตถุที่สัมผัสกับพื้น คือ f ที่มีทิศทางสวนทางกับแรงกระทำทั้งสองแรงที่ผลักวัตถุให้เคลื่อนที่ ดังนั้นถ้าเราสมมติให้แรงที่กระทำทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปทิศทางใดเป็นบวก ดังนั้นแรงที่มีทิศทางสวนทางอีกด้านย่อมเป็นลบ ดังนั้นเราจึงได้ว่า

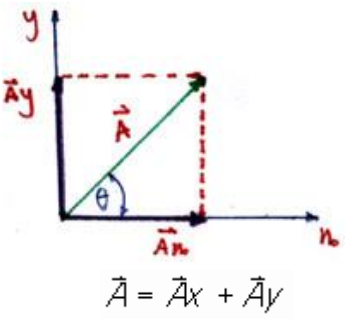
F_1 และ F_2 เป็นบวก(+)

f แรงเสียดทานเป็นลบ(-)

2. เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector)

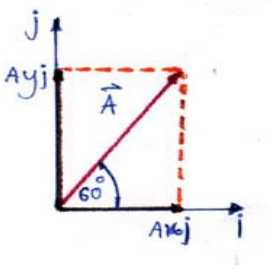
เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector)หมายถึง เวกเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วย

ส่วนประกอบของเวกเตอร์ใน 2 มิติ



.....
.....
.....
.....
.....
.....

เวกเตอร์ มีขนาด 5 หน่วย ในทิศ $E60^{\circ}N$ จงหาเวกเตอร์ ในรูป Unit Vector



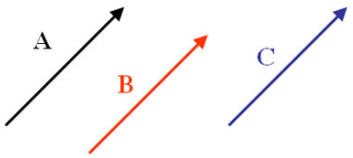
.....
.....
.....
.....
.....
.....

เวกเตอร์ มีขนาด 6 หน่วย ในทิศ 30 จงหาเวกเตอร์ ในรูป Unit Vector

.....
.....
.....
.....
.....
.....

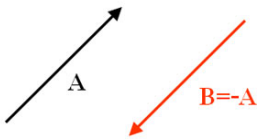
<u>การเท่ากันของปริมาณเวกเตอร์</u>

ถ้ามีเวกเตอร์สองอัน A และ B เวกเตอร์ทั้งสองนี้จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ เป็นเวกเตอร์ที่มีทั้ง ขนาดเท่ากันและชี้ในทิศทางเดียวกัน (ไม่จำเป็นต้องมีจุดเริ่มต้นเดียวกัน หรืออยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน) อย่างในรูปข้างล่าง $\vec{A} = \vec{B} = \vec{C}$



<u>นิยาม Negative vector</u>

เราเรียกเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\vec{A}$ แต่มีทิศตรงกันข้ามว่า $-\vec{A}$



2. การรวมเวกเตอร์

การรวมเวกเตอร์ เป็นการรวมปริมาณเวกเตอร์หรือการหาเวกเตอร์ลัพธ์นั้นเองการรวมเวกเตอร์มี 2 วิธีคือการรวมเวกเตอร์โดยการสร้างรูป และการรวมเวกเตอร์ด้วยวิธีการคำนวณซึ่งใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เข้าช่วย เช่น ใช้กฎทางตรีโกณมิติ การใช้ทฤษฎีบทปีธากอลัส ซึ่งเราอาจจะต้องทำการพิจารณาให้เวกเตอร์นั้นอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก หรือถ้าไม่อยู่ในรูปสามเหลี่ยมเราก็สามารถหาได้โดยมีรูปแบบการคำนวณที่จะกล่าวถึงต่อไป

วิธีที่ 1 การรวมเวกเตอร์โดยการสร้างรูป

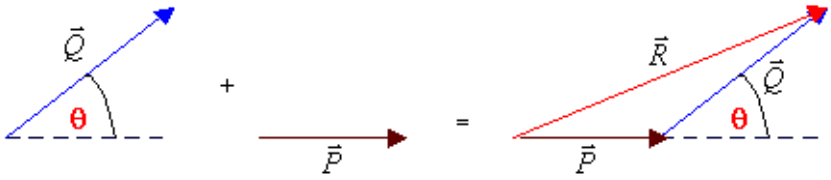
หลักการ

1. เขียนลูกศรแทนเวกเตอร์แต่ละปริมาณ โดยลากติดต่อกันไปเลย ให้หางต่อกับหัวลูกศรจนครบทุกเวกเตอร์

2. เส้นตรงที่ลากจากจุดตั้งต้นไปจนถึงจุดสุดท้าย จะเป็นเวกเตอร์ลัพธ์ (Resultant Vector) ทั้งขนาดและทิศทาง

ตัวอย่าง

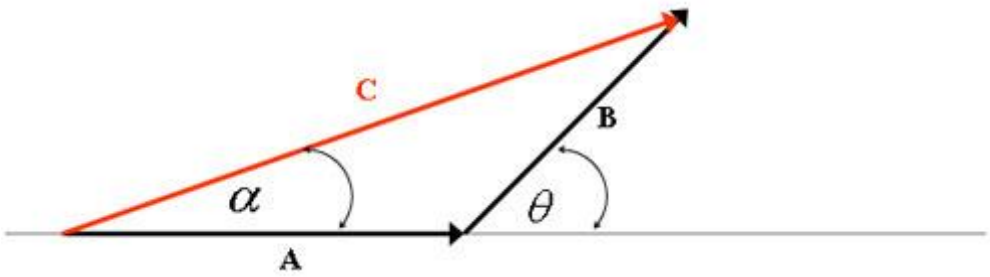
การบวกเวกเตอร์ ทำได้โดยเขียนเวกเตอร์ที่เป็นตัวตั้ง จากนั้นเอาหางของเวกเตอร์ที่เป็นผลบวกหรือผลต่าง มาต่อกับหัวของเวกเตอร์ตัวตั้ง โดยเขียนให้ถูกต้องทั้งขนาดและทิศทาง เวกเตอร์ลัพธ์หาได้โดยการวัดระยะทาง จากหางเวกเตอร์แรกไปยังหัวเวกเตอร์สุดท้าย**ดังรูป**



จากรูป เวกเตอร์ $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

<u>การบวกเวกเตอร์</u>

ให้ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งทำมุม θ ระหว่างกัน และให้เวกเตอร์ $\vec{C}$ เป็นผลบวกเวกเตอร์ของ $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ หรือ $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ โดยให้ $\vec{C}$ ทำมุม α กับ $\vec{A}$ การบวกเวกเตอร์นี้สามารถแสดงโดยวิธีหางต่อหัว ดังรูปข่างล่างนี้



ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{C}$ หรือ $|C|$ (หรือบางครั้งอาจเขียน C เฉยๆ) สามารถคำนวณได้จาก

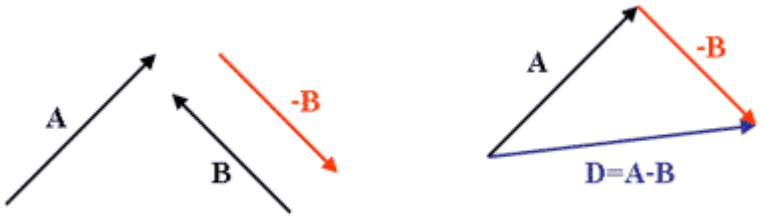
$$|C| = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2|A||B|\cos\theta}$$

โดยทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{C}$ จะทำมุมกับเวกเตอร์ $\vec{A}$ เป็นมุมเท่ากับ α โดย

$$\tan\alpha = \frac{SP}{PS} = \frac{|B|\sin\theta}{|A| + |B|\cos\theta}$$

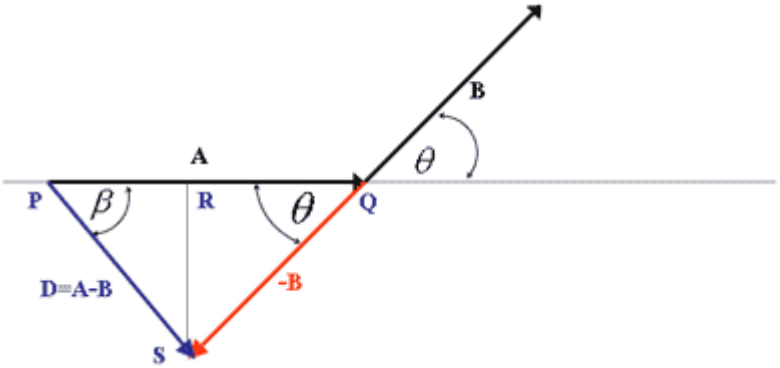
การลบเวกเตอร์

การลบเวกเตอร์โดยการเขียนรูปใช้หลักการเดียวกับการบวกเวกเตอร์เพียงแต่กลับทิศเวกเตอร์ด้วยเครื่องหมายลบ



ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{D}$ หรือ $|D|$ สามารถคำนวณได้จาก

$$|D| = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 - 2|A||B|\cos\theta}$$



และ $$\tan\beta = \frac{RS}{PR} = \frac{|B|\sin\theta}{|A| - |B|\cos\theta}$$

คุณสมบัติของการบวกเวกเตอร์

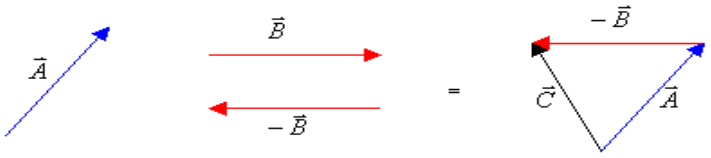
$\vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}$
$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$
$m\vec{A} = \vec{A}m$ เมื่อ m เป็นปริมาณสเกลาร์
$m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$

คุณสมบัติของการบวกเวกเตอร์

1. $A + B = B + A$ คุณสมบัติการสลับที่
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ คุณสมบัติการจัดหมู่

การลบเวกเตอร์ สามารถหาเวกเตอร์ลัพธ์ได้เช่นเดียวกับการบวกเวกเตอร์ แต่ให้กลับทิศทาง เวกเตอร์ตัวลบ ดังนี้

ถ้า $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$



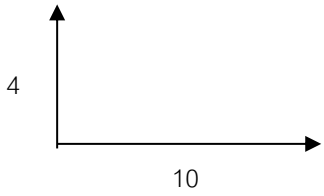
วิธีที่ 2 การรวมเวกเตอร์โดยการคำนวณมี 4 กรณี คือ

กรณีที่ 1 เวกเตอร์อยู่ในแนวตั้งฉากกัน

จากรูปเวกเตอร์ด้านบนแรง P , Q เป็นแรงย่อย และแรง R เป็นแรงรวมหรือแรงลัพธ์ ดังนั้นเราสามารถคำนวณหาแรงรวม R ได้โดยวิธีการดังนี้

$$R^2 = P^2 + Q^2$$

ตัวอย่าง จงหาเวกเตอร์รวมตามรูปต่อไปนี้



<u>วิธีทำ</u> ทำการสร้างรูปให้อยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก หรือสร้างรูปเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ทำการหาแรงรวมโดยใช้ความรู้ทฤษฎีบทปีธากอลัส ดังนั้นแรงรวม R เท่ากับ

$$R^2 = 4^2 + 10^2$$

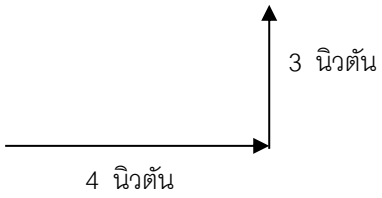
$$R = \sqrt{4^2 + 10^2}$$

$$= \sqrt{16 + 100}$$

$$= \sqrt{116}$$

$$= 10.77$$

ตัวอย่าง จงหาแรงรวมตามรูปต่อไปนี้



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

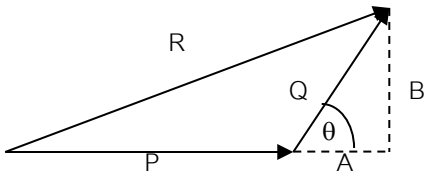
.....

.....

.....

กรณีที่ 2 เวกเตอร์ไม่อยู่ในแนวตั้งฉาก

ในกรณีที่เวกเตอร์ย่อยไม่ตั้งฉากกัน เราอาจใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ทั้งตรีโกณมิติ และทฤษฎีบทปีธากอลัส ช่วยในการหาค่าของแรงรวม ซึ่งถ้าเวกเตอร์อยู่ในรูปด้านล่างนี้ เมื่อเวกเตอร์เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

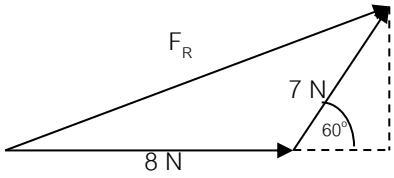
.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง แรงกระทำดังรูปจงหาขนาดของแรงรวม



จาก …….. = ……

……

……

……

……

……

……

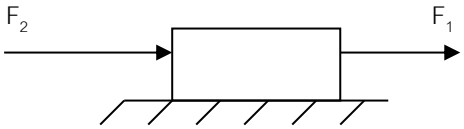
……

……

……

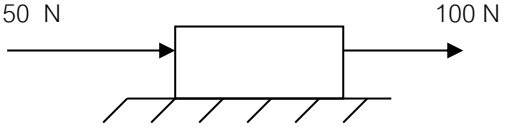
กรณีที่ 3 เวกเตอร์อยู่ในแนวเดียวกันและมีทิศทางเดียวกัน

ในกรณีที่เวกเตอร์ย่อยอยู่ในแนวเดียวกันทิศทางเดียวกัน เราสามารถนำเวกเตอร์นั้นมารวมกัน หรือบวกกันได้เลย เพราะเวกเตอร์นั้นอยู่ในทิศเดียวกัน แต่ต้องทำการพิจารณาหน่วยต้องอยู่ในหน่วยเดียวกันด้วย



$$F = F_1 + F_2$$

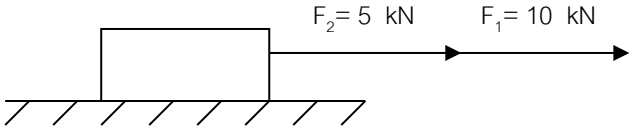
ตัวอย่าง จงหาแรงรวมดังรูปต่อไปนี้



<u>วิธีทำ</u> จากรูปแรง $F_1 = 100$ N และแรง $F_2 = 50$ N

ดังนั้นแรงรวมเท่ากับ $F = F_1 + F_2 =$ ……

ตัวอย่าง แรงกระทำกับวัตถุดังรูป จงหาแรงลัพธ์

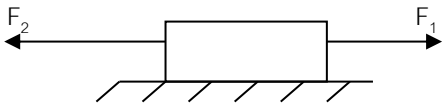


<u>วิธีทำ</u>

$$F_R = F_1 + F_2$$
$$= 10 + 5 \quad \text{kN}$$
$$= 15 \quad \text{kN}$$

กรณีที่ 4 เวกเตอร์อยู่ในแนวเดียวกันและมีทิศทางตรงกันข้ามกัน

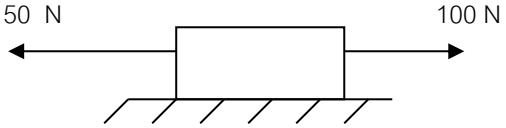
ในกรณีที่เวกเตอร์ย่อยอยู่ในแนวเดียวกันทิศทางตรงกันข้ามกัน เราสามารถนำเวกเตอร์นั้นมารวมกันหรือลบกันได้เลย เพราะเวกเตอร์นั้นอยู่ในทิศทางตรงข้ามกัน แต่ต้องทำการพิจารณาหน่วยต้องอยู่ในหน่วยเดียวกัน



$$F = F_1 - F_2$$

หรือ $F = F_2 - F_1$ อยู่ที่สมมติให้ทิศใดเป็นบวกหรือลบ

ตัวอย่าง จงหาแรงรวมดังรูปต่อไปนี้

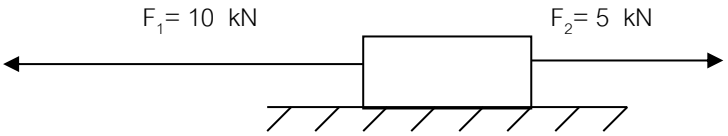


<u>วิธีทำ</u> จากรูปแรง $F_1 = 100$ N และแรง $F_2 = 50$ N สมมติให้ทิศที่ไปทางขาวเป็นบวก

ดังนั้นแรงรวมเท่ากับ

$$F = F_1 - F_2$$
$$= 100 - 50$$
$$= 50 \quad \text{N}$$

ตัวอย่าง แรงกระทำกับวัตถุดังรูป จงหาแรงลัพธ์

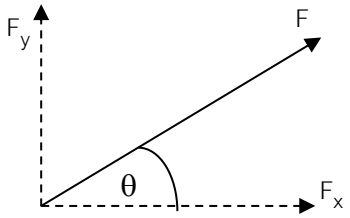


<u>วิธีทำ</u>

$$F_R = F_1 - F_2 = \text{.....}$$

1.2 การแตกเวกเตอร์

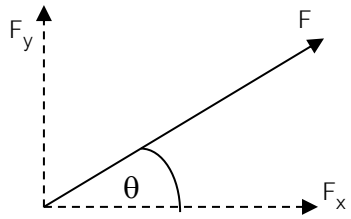
การแตกหรือแยกเวกเตอร์ เป็นพื้นฐานในการหาปริมาณเวกเตอร์ใดๆ ที่มีการกระทำทำให้เกิดเวกเตอร์ย่อยในแกนปกติ x , y เช่น แรงที่กระทำเป็นมุมกับวัตถุ ทำให้เกิดเวกเตอร์ในแนวแกนปกติดังแสดงในรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2

จากรูปแรงหรือเวกเตอร์ F กระทำกับวัตถุก้อนหนึ่ง ซึ่งเมื่อเราพิจารณาวัตถุเราจะเห็นว่าแรงกระทำดังกล่าวจะทำให้เกิดแรงย่อยสองแรงขึ้นคือ แรง F_y ที่จะพยายามยกวัตถุขึ้น และแรง F_x ที่จะพยายามลากวัตถุเคลื่อนที่ไปด้านหน้า ดังนั้นเมื่อเราพิจารณาดังนี้แล้วเราจึงต้องทำการหา แรงย่อยทั้งสอง หรือการแตกแรงหรือแตกเวกเตอร์นั่นเอง ซึ่งในการหาเราสามารถใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เข้าช่วยในการหาค่า

- ใช้ทฤษฎีบทปีธากอลัสช่วยในการหาค่า F_x , F_y



……

……

……

……

……

……

……

……

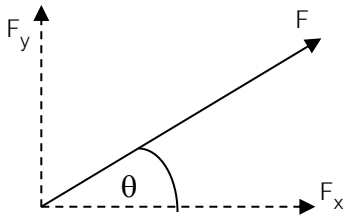
……

……

……

……

- ใช้ตรีโกณมิติช่วยในการหาค่า F_x , F_y เมื่อเราทราบค่ามุม θ



.....

.....

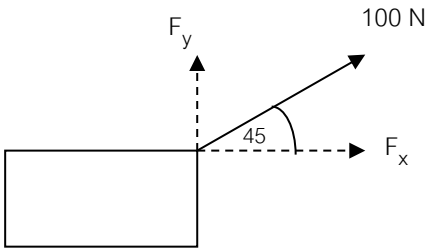
.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง จากรูปจงหาแรงย่อย F_x , F_y



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....