หน่วยที่ 1

การวัดและปริมาณเวกเตอร์

แนวคิด

วิชาฟิสิกส์เป็นวิชาทางด้านวิทยาศาสตร์ที่เป็นเนื้อหาทางด้านของการค้นพบกฎเกณฑ์ต่างๆ ซึ่งมาจากการทดลองค้นคว้า ผลการทดลองที่เกิดขึ้นจะต้องมีการวัดเป็นปริมาณต่างๆ ดังนั้น เพื่อให้เกิดการเปรียบเทียบ จึงต้องมีการกำหนดปริมาณต่างๆ และหน่วยของปริมาณเพื่อจะได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการค้นคว้าและทดลองได้ชัดเจนขึ้น

สาระการเรียนรู้

1. การวัด
2. ปริมาณเวกเตอร์

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. อธิบายหน่วยของปริมาณต่างๆ
2. ใช้คำนำหน้าหน่วยแทนตัวเลข 10 ยกกำลังได้
3. เขียนปริมาณเวกเตอร์ได้
4. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ เวกเตอร์ได้
5. เพื่อส่งเสริมให้เกิดเจตคติที่ดีต่อการเรียนวิทยาศาสตร์ มีความสนใจและเห็นคุณค่าของการเรียนวิทยาศาสตร์
6. เพื่อให้ตระหนักถึงความสัมพันธ์ระหว่างวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและวิชาชีพในเชิงที่มีอิทธิพลและผลกระทบซึ่งกันและกัน
7. เพื่อสร้างเจตคติที่เหมาะสมในการใช้วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีอย่างมีคุณธรรมและมีความรับผิดชอบต่อตนเอง สังคม และสิ่งแวดล้อม

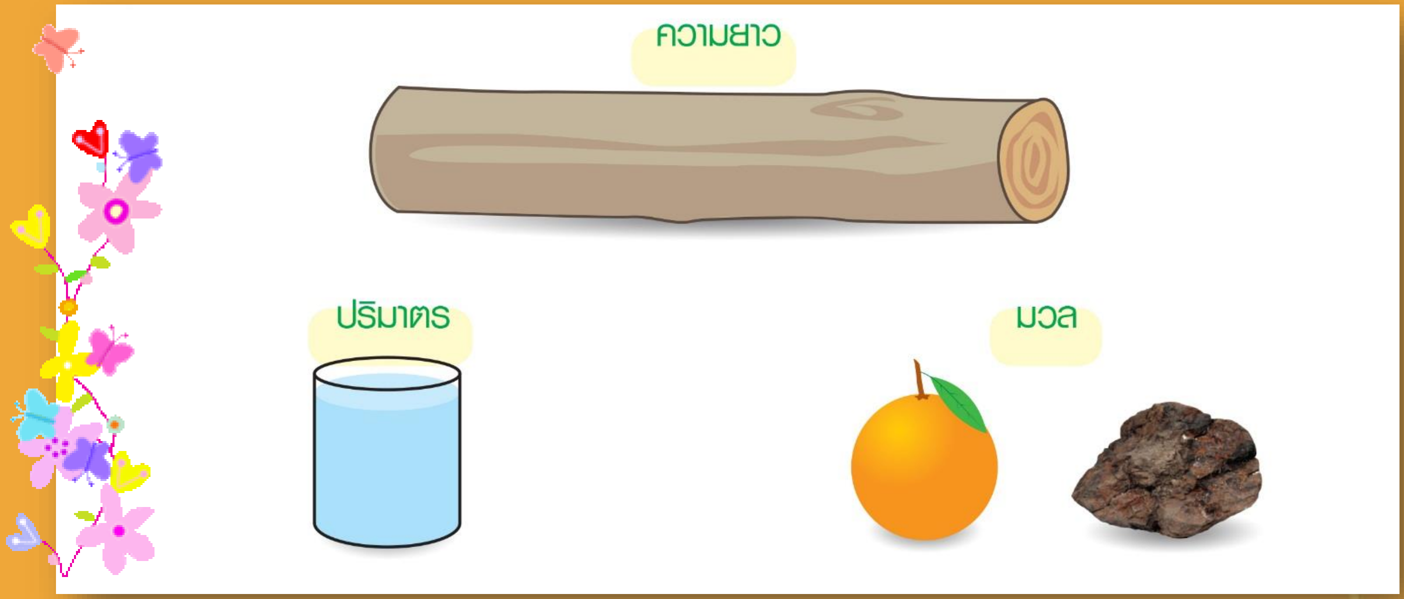
การวัด (Measurement)

วิลเลี่ยม ทอมสัน (William Thomson ค.ศ. 1858) นักวิทยาศาสตร์ชาวอังกฤษ ได้กล่าวไว้ว่า

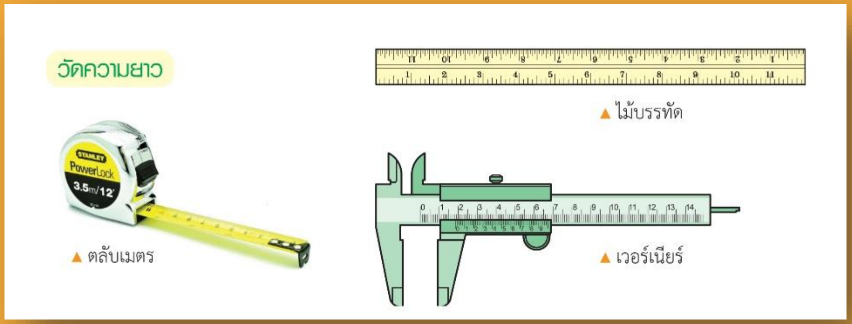
> “ถ้าคุณจะพูดถึงอะไรสักอย่างหนึ่ง
> แล้วสามารถแสดงออกมาเป็นตัวเลขได้
> ก็แสดงว่าคุณเริ่มจะรู้อะไรขึ้นมาบ้างแล้ว
> แต่ถ้าคุณแสดงออกไม่ได้
> ก็เหมือนกับว่าคุณไม่รู้เรื่องอะไรเลย”

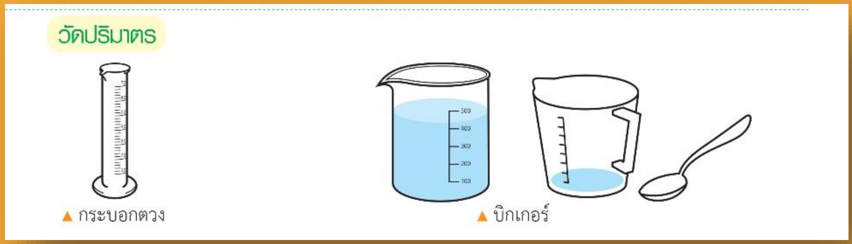
การวัด หมายถึง การเลือกใช้เครื่องมือหาปริมาณสิ่งของออกมาเป็นเลข โดยมีหน่วยกำกับที่ถูกต้องการวัดเป็นสิ่งสำคัญในวิชาฟิสิกส์ที่จะบ่งบอกถึงความสำเร็จหรือล้มเหลวของงาน ถ้าการวัดไม่ถูกต้องหรือไม่ดีพอจะทำให้เกิดความล้มเหลวขึ้น สิ่งที่มีอิทธิพลต่อการวัดประกอบไปด้วย

ปริมาณของสิ่งที่จะวัด



เครื่องมือที่ใช้ในการวัด





หน่วยของการวัด

ในการประชุมทางวิทยาศาสตร์ที่กรุงปารีส เมื่อ พ.ศ. 2503 นักวิทยาศาสตร์ได้ตกลงให้มาตรฐานในการวัดทางวิทยาศาสตร์เหมือนกัน องค์การระหว่างชาติเพื่อการมาตรฐาน (International Organization for Standardization หรือ ISO) โดยกำหนดระบบใหม่ขึ้นมา เรียกว่า "ระบบหน่วยระหว่างชาติ" (International System of Units หรือ SI)

โดยกำหนดหน่วยในการวัดในระบบหน่วยระหว่างชาติ แบ่งหน่วยต่างๆ ออกเป็น 3 ประเภทคือ

1. หน่วยฐาน (Base Units)

เป็นหน่วยเบื้องต้นของปริมาณต่างๆ ที่ใช้ในการวัดสิ่งต่างๆ ซึ่งควรจะทราบ

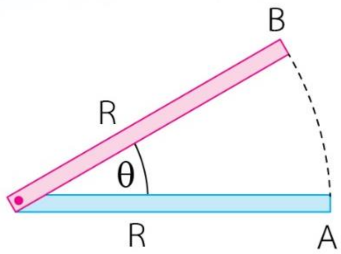
ลำดับที่	ปริมาณฐาน	หน่วย	สัญลักษณ์
1	ความยาว (length)	เมตร (meter)	m
2	มวล (mass)	กิโลกรัม (kilogram)	kg
3	เวลา (time)	วินาที (second)	s
4	อุณหภูมิ อุณหพลวัต (thermodynamic temperature)	เคลวิน (kelvin)	K
5	ปริมาณของสาร (amount of substance)	โมล (mole)	mol
6	กระแสไฟฟ้า (electric current)	แอมแปร์ (ampere)	A
7	ความเข้มของการส่องสว่าง (luminous intensity)	แคนเดลา (candela)	cd

2. หน่วยเสริม (Supplementary Units)

เป็นหน่วยที่ใช้ในการวัดมุม ในการวัดมุมโดยทั่วๆ ไปจะวัดมุมโดยเทียบกับเส้นระดับในแนวราบ แล้วหมุนไปในลักษณะสวนทิศกับการหมุนของเข็มนาฬิกา โดยแบ่งออกเป็น 2 หน่วย

2.1 เรเดียน (Radian) ใช้สัญลักษณ์ rad เป็นหน่วยที่ใช้ในการวัดมุมที่เกิดจากการหมุนบนระนาบใดระนาบหนึ่ง (2 มิติ) โดยมีนิยามของมุม

“มุมจะเกิดจากส่วนโค้งจากปลายของวัตถุที่หมุนไป ต่อรัศมีของการหมุน”



$\therefore$ มุม $\theta = \dfrac{\text{ส่วนโค้ง}}{\text{รัศมี}}$

มุม $\theta = \dfrac{AB}{R}$

ในกรณีที่วัตถุหมุนไป 1 รอบ หรือ 1 วงกลม

ส่วนโค้ง $= 2\pi R$

$\therefore$ มุม $\theta = \dfrac{2\pi R}{R}$

มุม $\theta = 2\pi$ เรเดียน

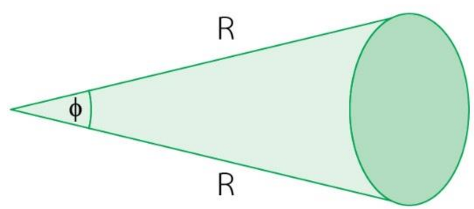
หมายเหตุ

ในการวัดมุม เป็น "องศา" เมื่อใช้มุมในระบบ SI
จะต้องเปลี่ยนเป็น "เรเดียน" โดยการเปรียบเทียบจากมุมครบ 1 รอบ
360 องศา = 2π เรเดียน

2.2 สตีเรเดียน (Steradian) ใช้สัญลักษณ์ sr หรือบางทีเรียกว่า “มุมตัน” (Solid Angle) เป็นมุมของกรวย ซึ่งเป็น 3 มิติ โดยมีนิยามของมุมว่า

2.2 สตีเรเดียน (Steradian) ใช้สัญลักษณ์ sr หรือบางทีเรียกว่า “มุมตัน” (Solid Angle) เป็นมุมของกรวย ซึ่งเป็น 3 มิติ โดยมีนิยามของมุมว่า

“มุมจะเกิดจากพื้นที่ผิวของปากกรวย ต่อรัศมียกกำลังสอง”



$$\text{มุม } \phi = \frac{\text{พื้นที่}}{(\text{รัศมี})^2}$$

$$\text{มุม } \phi = \frac{A}{R^2}$$

ในกรณีที่กรวยขยายพื้นที่ขึ้นมากที่สุดจะกลายเป็นทรงกลม พื้นที่จะกลายเป็นพื้นที่ผิวของทรงกลม

$$\text{มุม } \phi = \frac{4\pi R^2}{R^2}$$

$$\text{มุม } \phi = 4\pi \quad \text{sr}$$

3. หน่วยอนุพันธ์ (Derived Units)

เป็นหน่วยที่เกิดขึ้นจากการที่นำหน่วยฐานมาสร้าง ซึ่งการสร้างหน่วยอนุพัทธ์จะเป็นไปตามนิยามของปริมาณต่างๆ เช่น

อัตราเร็ว หมายถึง ระยะทางที่เปลี่ยนไปในหนึ่งหน่วยเวลา

$$v = \frac{\Delta s}{t}$$

หน่วยของอัตราเร็วคือ m/s เป็นหน่วยอนุพัทธ์

ความเร่ง หมายถึง ความเร็วที่เปลี่ยนไปในหนึ่งหน่วยเวลา

$$\bar{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{t}$$

หน่วยของความเร่งคือ m/s^2 เป็นหน่วยอนุพัทธ์

แรง 1 นิวตัน หมายถึง แรงที่มากระทำต่อวัตถุมวล 1 กิโลกรัมให้เคลื่อนที่ไปด้วยความเร่ง 1 เมตร/วินาที^{2} หาได้จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\sum\vec{F} = m\vec{a}$$

หน่วยของแรงคือ $kg{\cdot}m/s^2$ เป็นหน่วยอนุพัทธ์หรือตั้งชื่อใหม่เป็น นิวตัน (N)

งาน หมายถึง ผลคูณของแรง กับระยะทางตามแนวแรง

$$W = F \times S$$

หน่วยของงานคือ N . m เป็นหน่วยอนุพัทธ์หรือตั้งชื่อใหม่เป็น จูล (J)

บางครั้งเราอาจจะตั้งชื่อหน่วยอนุพัทธ์ขึ้นใหม่เพื่อสะดวกในการศึกษา และเป็นการให้เกียรติแก่นักวิทยาศาสตร์ที่ศึกษาเรื่องนั้น ตัวอย่างเช่น แรงจะมีหน่วยเป็น นิวตัน (N) นอกจากนี้ยังสะดวกในการใส่คำนำหน้าหน่วย

ตัวอย่างของหน่วยอนุพัทธ์

ปริมาณ	หน่วยอนุพัทธ์	หน่วยฐาน
แรง (Force)	N (Newton)	$kg \cdot m/s^2$
งาน (Work)	J (Joule)	$kg \cdot m^2/s^2$
กำลัง (Power)	W (Watt)	$kg \cdot m^2/s^3$
ความดัน (Pressure)	Pa (Pascal)	$kg/m \cdot s^2$
ประจุไฟฟ้า (Electric Charge)	C (Coulomb)	$A \cdot s$

4. คำนำหน้าหน่วย (Prefix)

ในการเขียนตัวเลขในทางวิทยาศาสตร์ตัวเลขที่มีค่ามากๆ หรือน้อยมากๆ จะเขียนอยู่ในรูปของสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ (Scientific Notation) เป็นการเขียนตัวเลขอยู่ในรูปของเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นสิบและเลขยกกำลังเป็นจำนวนเต็ม ในรูป $A \times 10^{n}$ $(0 < A < 10)$

เช่น	3,500,000,000	=	3.5×10^{9}
	0.000000062	=	6.2×10^{-8}

ตัวเลข 10 ยกกำลังจะใช้สัญลักษณ์แทน เพื่อใช้นำหน้าหน่วยต่างๆ ทำให้หน่วยนั้นมีขนาดใหญ่ขึ้นหรือเล็กลงตามค่าของเลข 10 ยกกำลังนั้น ตัวอย่างเช่น ถ้าเรากำหนดให้ M (mega) แทนเลข 10^{6} เมื่อมีระยะทางซึ่งมีค่า 8,250,000 m เราก็จะเขียนค่าของระยะทางได้ใหม่ โดยใช้คำนำหน้าหน่วยที่เราตั้งขึ้นไปไว้หน้าหน่วย

ระยะทาง 8,250,000 m	=	8.25×10^{6} m
	=	8.25 Mm

สัญลักษณ์ที่ใช้ และคำนำหน้าหน่วย

คำนำหน้าหน่วย	สัญลักษณ์	แทนค่า
เทระ (tera)	T	10^{12}
จิกะ (giga)	G	10^{9}
เมกะ (mega)	M	10^{6}
กิโล (kilo)	k	10^{3}
เฮกโต (hecto)	h	10^{2}
เดคา (deka)	da	10
เดซิ (deci)	d	10^{-1}
เซนติ (centi)	c	10^{-2}
มิลลิ (milli)	m	10^{-3}
ไมโคร (micro)	μ	10^{-6}
นาโน (nano)	n	10^{-9}
พิโก (pico)	p	10^{-12}

ตัวอย่าง

รัศมีของอะตอมของแก๊สไฮโดรเจน 5.3×10^{-11} เมตร จงเขียนรัศมีของอะตอมในรูปของพิโกเมตร

วิธีทำ

จาก 1 pm เท่ากับ 10^{-12} m

รัศมีของอะตอมของแก๊สไฮโดรเจน	=	5.3×10^{-11}	m
	=	$5.3 \times 10^{1} \times 10^{-12}$	m
	=	5.3×10^{1}	pm
	=	53	pm
∴ รัศมีของอะตอมของแก๊สไฮโดรเจน	=	53	พิโกเมตร

ปริมาณเวกเตอร์

ปริมาณเวกเตอร์ เป็นปริมาณที่จะต้องมีขนาดและทิศทางเป็นส่วนประกอบเพื่อทำให้เกิดความเข้าใจในปริมาณนั้นชัดเจน เช่น รถยนต์วิ่งไปทางทิศเหนือ 200 เมตร

ปริมาณสเกลาร์ เป็นปริมาณที่มีขนาดเพียงอย่างเดียวแล้วเข้าใจชัดเจน เช่น ให้เวลาในการสอบ 2 ชั่วโมง

ความแตกต่างของปริมาณทั้งสองอยู่ตรงที่ ปริมาณเวกเตอร์ไม่สามารถนำขนาด (ตัวเลข) มาบวก ลบ คูณ หาร ได้ทันทีเหมือนปริมาณสเกลาร์

การเขียนปริมาณเวกเตอร์

ในการเขียนปริมาณเวกเตอร์จะมีรูปแบบการเขียนแตกต่างกันออกไปจากปริมาณสเกลาร์ โดยการใช้หัวลูกศรอยู่บนสัญลักษณ์ที่แทนปริมาณเวกเตอร์นั้น เช่น

$\vec{A}$ อ่านว่า เวกเตอร์ A

$\vec{B}$ อ่านว่า เวกเตอร์ B

ตัวอย่างของปริมาณเวกเตอร์ และสเกลาร์

ปริมาณเวกเตอร์	ปริมาณสเกลาร์
ความเร็ว ($\vec{v}$)	อัตราเร็ว (v)
ความเร่ง ($\vec{a}$)	อัตราเร่ง (a)
การกระจัด ($\vec{d}$)	ระยะทาง (S)
แรง ($\vec{F}$)	เวลา (t)
สนามไฟฟ้า ($\vec{E}$)	มวล (m)

การเขียนปริมาณเวกเตอร์ต้องอธิบายให้ชัดเจนว่าปริมาณเวกเตอร์มีขนาดเท่าใด และทิศทางไปทางไหน ในการอธิบายความหมายของปริมาณเวกเตอร์แบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ

1. แบบบรรยาย

เป็นการเขียนโดยการใช้คำอธิบายขยายความของปริมาณเวกเตอร์ทั้งขนาดและทิศทาง

$\vec{a}$ = วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง 2 m/s^2 มีทิศทางไปทางทิศเหนือ

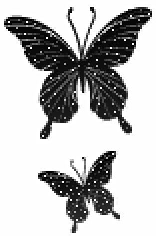
$\vec{d}$ = บ้านห่างจากวิทยาลัยเป็นระยะทาง 2 กิโลเมตร มีทิศทางไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้ของวิทยาลัย

$\vec{F}$ = ออกแรงดันวัตถุขนาด 4 นิวตัน มีทิศทางทำมุม 30° กับแนวระนาบ

การเขียนแบบนี้จะเป็นการบอกปริมาณเป็นตัวเลขและทิศทาง สำหรับทิศทางอาจจะบอกได้หลายรูปแบบ เช่น ใช้ทิศของภูมิศาสตร์ หรือบอกเป็นมุมทางคณิตศาสตร์

2. การเขียนแบบใช้ลูกศร

การเขียนปริมาณเวกเตอร์โดยใช้ลูกศรแทนปริมาณเวกเตอร์



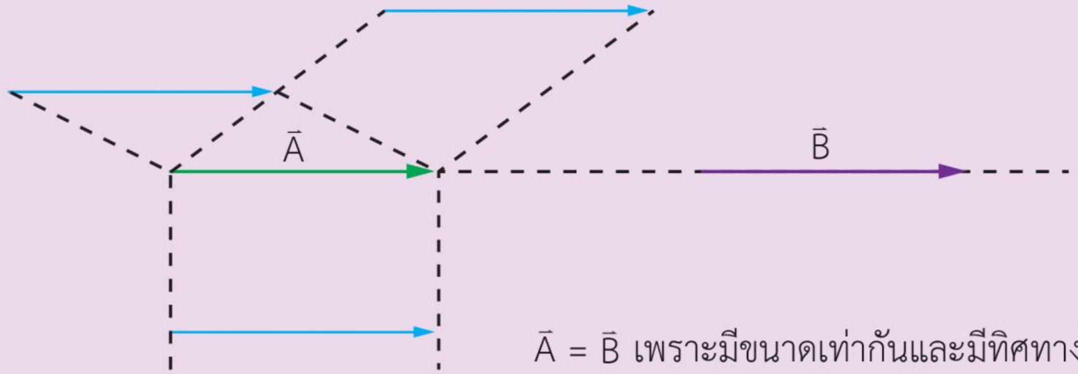
หัวลูกศร แสดง ทิศทาง

ความยาวลูกศร แสดง ขนาดของปริมาณโดยใช้สเกลย่อ

ในการเขียนแบบนี้จะเป็นการเขียนที่นิยมใช้กับปริมาณเวกเตอร์มากที่สุดเพราะสะดวก รวดเร็ว และสามารถนำไปอธิบายในเรื่องการบวก ลบ การหาองค์ประกอบของเวกเตอร์ได้ชัดเจน

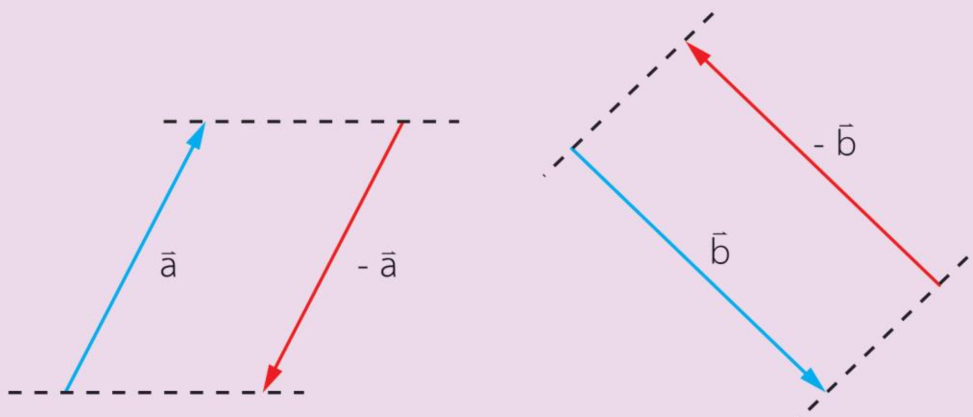
ข้อสังเกต

① การเขียนเวกเตอร์แบบลูกศรสามารถจะเคลื่อนย้ายลูกศรไปทางไหนก็ได้ หรืออาจจะบอกว่าเป็นปริมาณเวกเตอร์ที่เท่ากัน



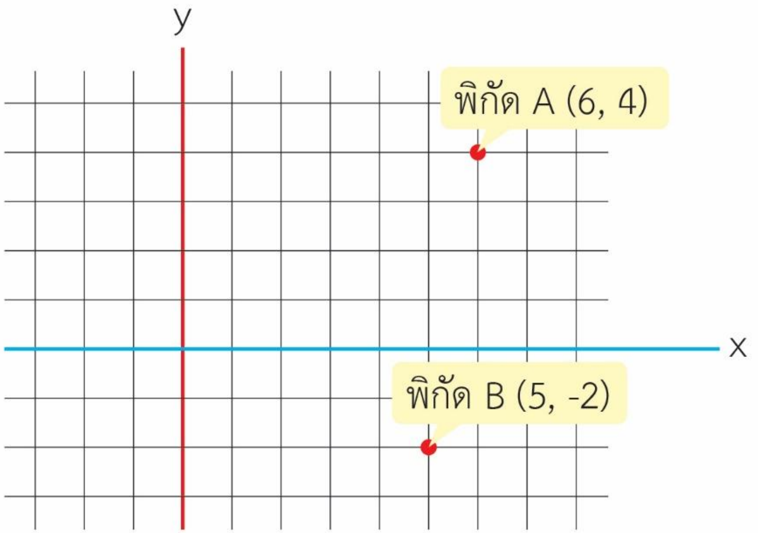
$\vec{A} = \vec{B}$ เพราะมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางไปทางเดียวกัน

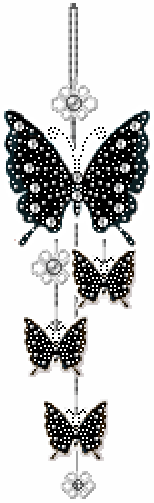
② เวกเตอร์ลบ จะหมายถึง ปริมาณเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับเวกเตอร์เดิม แต่มีขนาดเท่ากัน ไม่ได้หมายความว่ากระทำให้เวกเตอร์มีค่าน้อยลงไปตามหลักคณิตศาสตร์



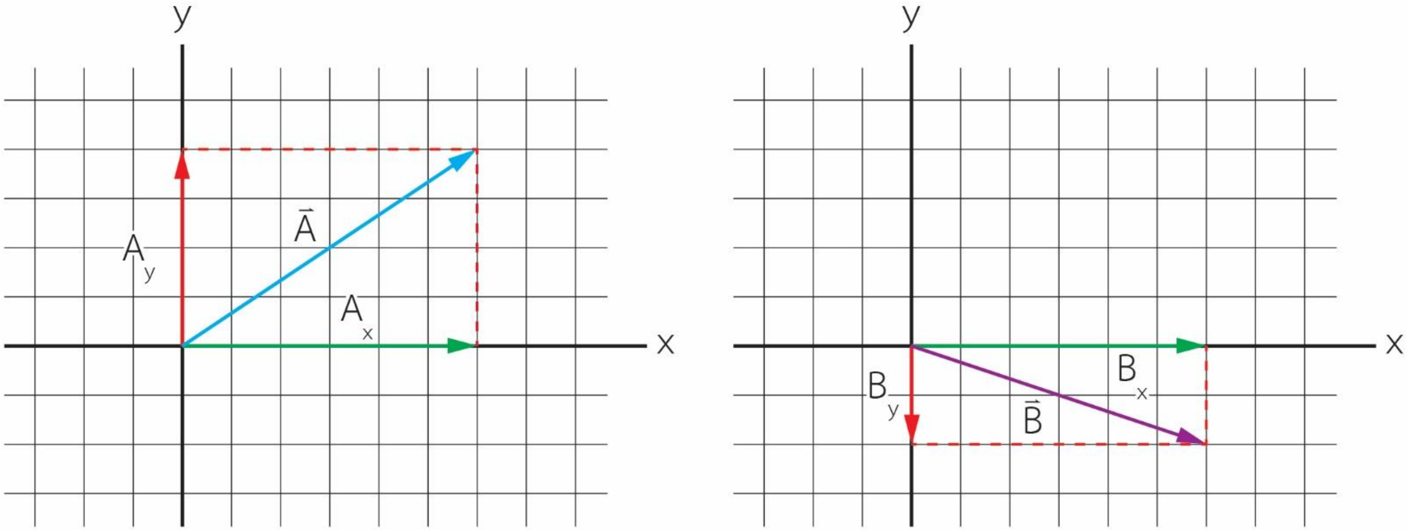
$\vec{a} \neq -\vec{a}$ เพราะทิศทางตรงกันข้าม

การแยกเวกเตอร์ไปในแนวแกน x และ y จะเหมือนกับการบอกพิกัดของจุดใดจุดหนึ่งบนแกน x และ y





ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราเขียนเวกเตอร์ $\vec{A}$ และเวกเตอร์ $\vec{B}$



เราสามารถจะหาค่าองค์ประกอบของเวกเตอร์ในแนวแกน x และ y ได้ดังนี้

องค์ประกอบของ $\vec{A}$ ในแนวแกน x มีค่า 6 หน่วย

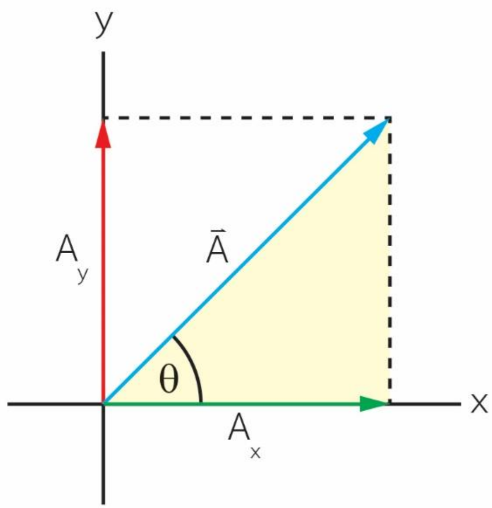
องค์ประกอบของ $\vec{A}$ ในแนวแกน y มีค่า 4 หน่วย

องค์ประกอบของ $\vec{B}$ ในแนวแกน x มีค่า 5 หน่วย

องค์ประกอบของ $\vec{B}$ ในแนวแกน y มีค่า -2 หน่วย

นอกจากนี้เรายังสามารถหาองค์ประกอบของเวกเตอร์โดยอาศัยตรีโกณมิติมาช่วย

- ในกรณีที่เวกเตอร์ทำมุมกับแนวราบ (แกน x)



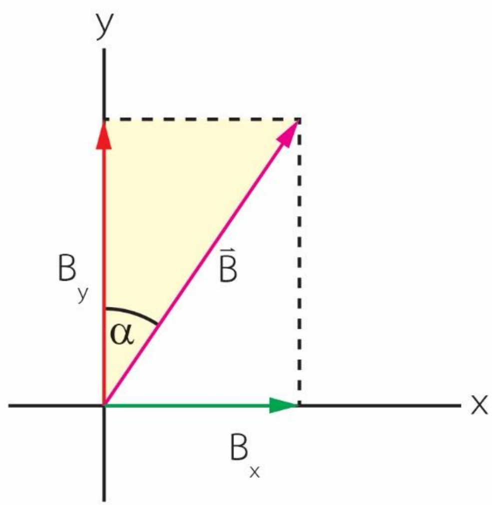
$$\cos\theta = \frac{A_x}{A}$$

$$A_x = A\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{A_y}{A}$$

$$A_y = A\sin\theta$$

● ในกรณีที่เวกเตอร์ทำมุมกับแนวดิ่ง (แกน y)



$$\cos\alpha = \frac{B_y}{B}$$

$$B_y = B\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{B_x}{B}$$

$$B_x = B\sin\alpha$$

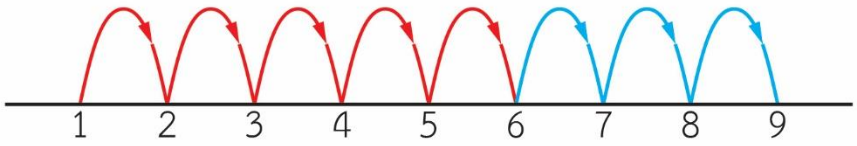
สรุปได้ว่า การหาองค์ประกอบของเวกเตอร์โดยใช้ตรีโกณมิติ

"ถ้าเวกเตอร์ทำมุมกับแกนใด องค์ประกอบทางแกนนั้นจะเป็นผลคูณของเวกเตอร์กับค่า cosine ของมุมนั้น ส่วนอีกแกนจะเป็นผลคูณของเวกเตอร์กับค่า sine ของมุมนั้น"

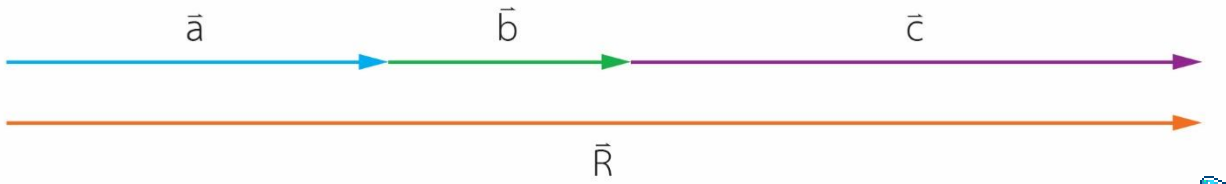
การบวกเวกเตอร์

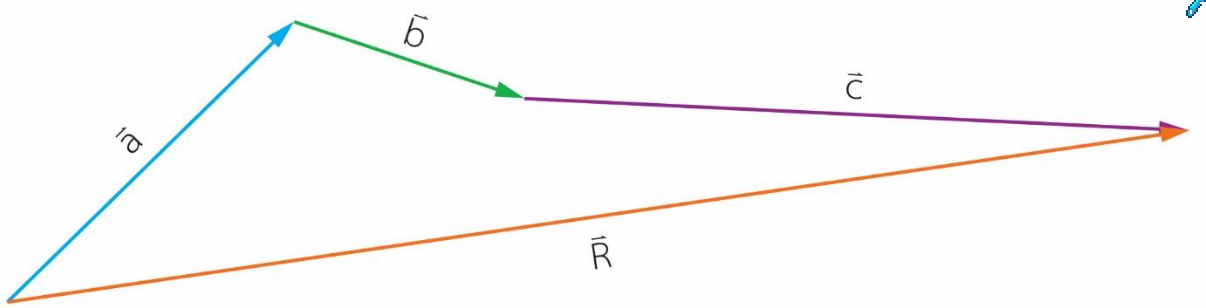
ในการบวกปริมาณสเกลาร์ การบวกคือการนับเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ

$$5 + 3 = 8$$



ปริมาณเวกเตอร์เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง การนำปริมาณเวกเตอร์มาบวกกัน ก็คือการนำเวกเตอร์แต่ละตัวมาต่อเรียงกันไป





จากรูป ถ้าเวกเตอร์แต่ละตัวมีทิศทางเดียวกัน ขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์จะเท่าขนาดของเวกเตอร์แต่ละตัวนำมาบวกกัน เหมือนการบวกตัวเลขในคณิตศาสตร์ แต่ถ้าเวกเตอร์แต่ละตัวมีทิศทางไม่อยู่ในแนวเดียวกัน การนำเวกเตอร์มาบวกกันขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์จะไม่เท่าขนาดของเวกเตอร์แต่ละตัวนำมาบวกกัน เหมือนการบวกตัวเลขในคณิตศาสตร์

ดังนั้น การบวกเวกเตอร์จึงไม่เหมือนกับการบวกตัวเลขในคณิตศาสตร์เพราะจะต้องนำทิศทางมาพิจารณาด้วย ปริมาณเวกเตอร์เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง ผลลัพธ์ของการบวกเวกเตอร์ เรียกว่า เวกเตอร์ลัพธ์ ($\vec{R}$)

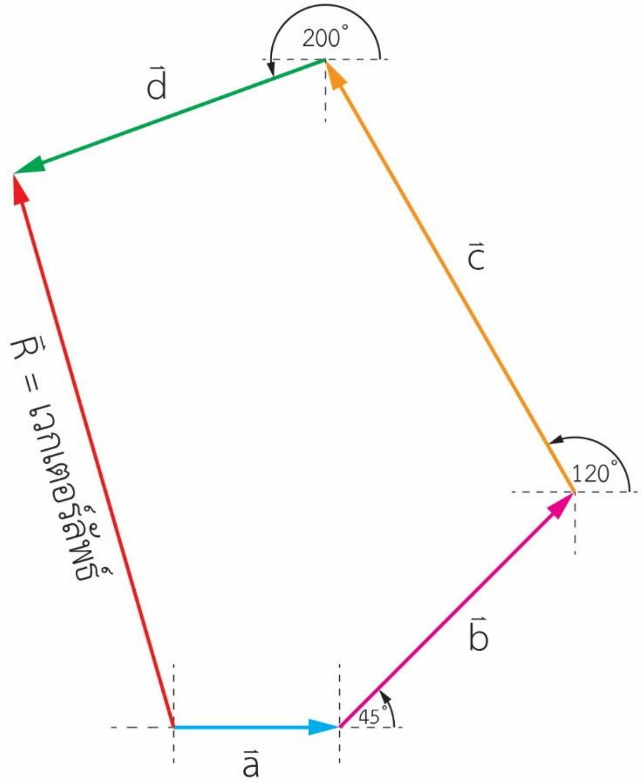
$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

ทิศทางของเวกเตอร์จะมีทิศทางที่แตกต่างกันออกไปมากมาย ดังนั้น การที่เราจะนำปริมาณเวกเตอร์หลายๆ ตัวมาบวกลบกัน ไม่สามารถจะนำขนาดของเวกเตอร์มาบวกหรือลบกันตามหลักการบวกลบตัวเลขได้

1. การบวกเวกเตอร์โดยการวาดรูป

การหาผลลัพธ์ของการบวกแบบนี้จะใช้วิธีการวาดรูปโดยใช้ลูกศรแทนปริมาณเวกเตอร์แต่ละเวกเตอร์จะใช้สเกลเดียวกัน จากนั้นนำเวกเตอร์ที่โจทย์กำหนดมาบวกกัน โดยเอาหางของเวกเตอร์ที่ 2 ไปต่อกับหัวเวกเตอร์แรก และต่อเรียงกันไป ผลลัพธ์ของการบวกจะเป็นเวกเตอร์ที่ลากจากหางเวกเตอร์แรกไปยังหัวเวกเตอร์สุดท้าย เรียกว่า เวกเตอร์ลัพธ์ ขนาดและทิศทางจะได้จากการวัด ตัวอย่างเช่น จากเวกเตอร์ที่กำหนดให้ จงหาผลบวกเวกเตอร์ทั้งหมด

$\vec{a}$	มีขนาด	4	เมตร ทำมุม	0	องศา
$\vec{b}$	มีขนาด	8	เมตร ทำมุม	45	องศา
$\vec{c}$	มีขนาด	12	เมตร ทำมุม	120	องศา
$\vec{d}$	มีขนาด	8	เมตร ทำมุม	200	องศา



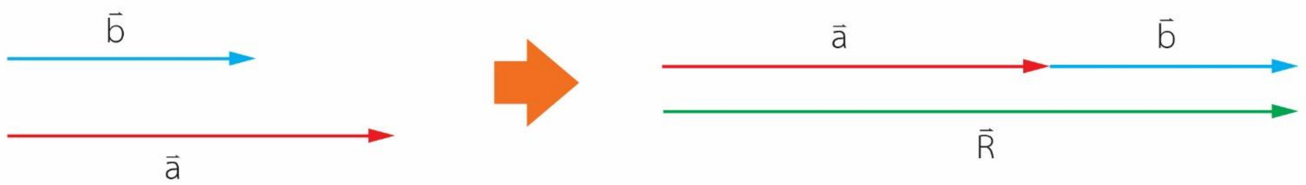
∴ จากรูปผลบวกของเวกเตอร์ทั้งหมดมีขนาดประมาณ 14 เมตร มีทิศทางทำมุมประมาณ 105 องศา

2. การบวกเวกเตอร์โดยการคำนวณ

ในการคำนวณจะต้องคำนวณหาขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์และทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์ ซึ่งเราจะแบ่งลักษณะของการคำนวณออกเป็น 2 ลักษณะ คือ

2.1 การบวกเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์

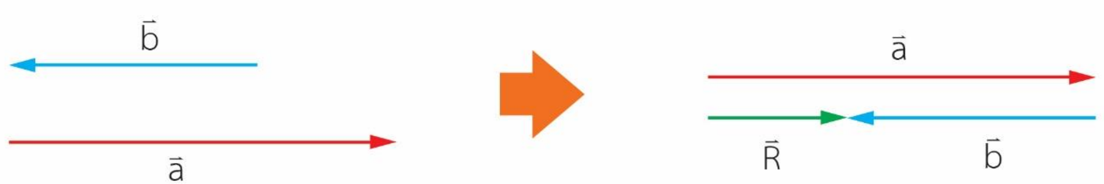
- กรณีเวกเตอร์มีทิศทางเดียวกัน



$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$$

$R = a + b$ เอาขนาดเวกเตอร์มาบวกกัน

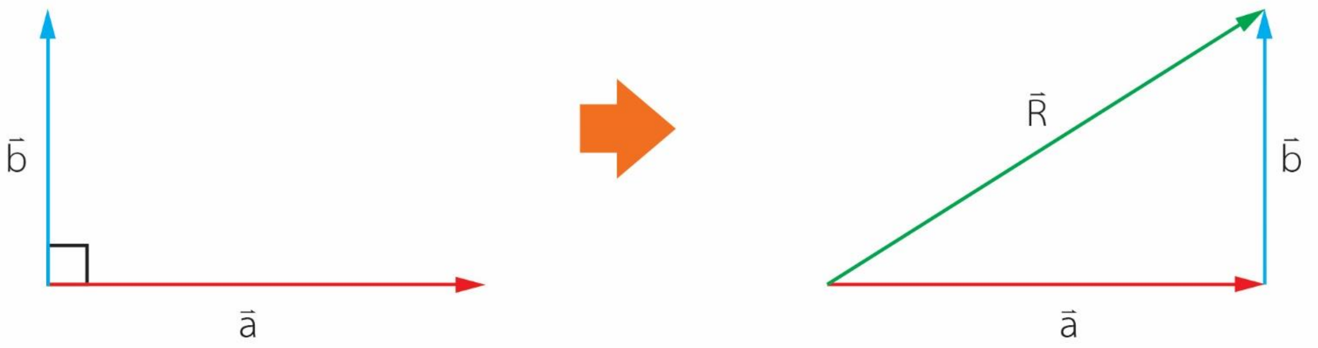
- กรณีเวกเตอร์มีทิศทางตรงข้ามกัน



$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$$

$R = a - b$ เอาขนาดเวกเตอร์มาลบกัน

- กรณีเวกเตอร์ทำมุมกัน 90°

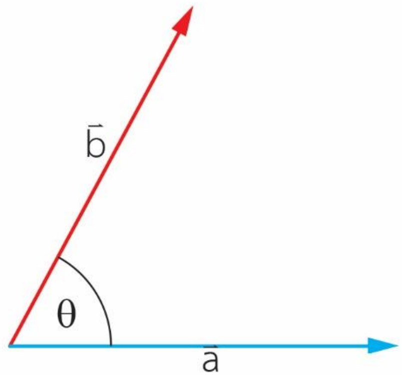


$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$

$R = \sqrt{a^2 + b^2}$ ใช้ทฤษฎีไพทาโกรัส

- กรณีเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ทำมุมกัน (θ)

จะหาผลลัพธ์โดยการคำนวณจากสูตร ซึ่งที่มาของสูตรจะมาจากการบวกโดยการวาดรูป โดยกำหนดขนาดของเวกเตอร์ทั้งสองและมุมระหว่างเวกเตอร์

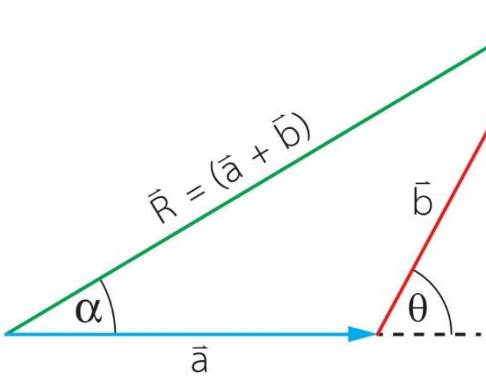


ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{a} = a$

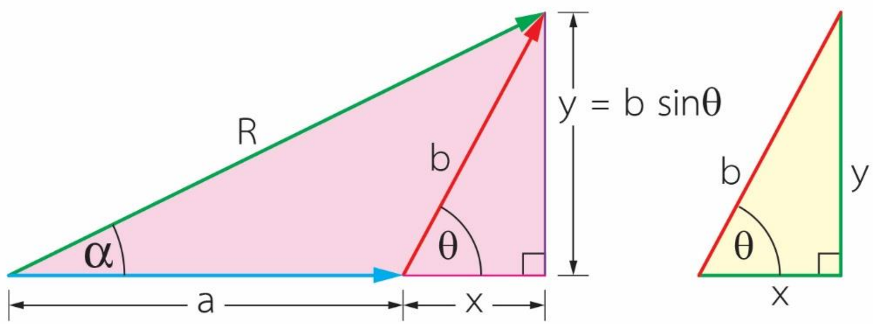
ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{b} = b$

มุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{a}$ กับ $\vec{b}$ คือ θ

เมื่อนำเวกเตอร์ทั้ง 2 มาบวกกันโดยการวาดรูปจะได้



การคำนวณหาค่าเวกเตอร์ลัพธ์ ($\vec{R}$) จะอาศัยสร้างให้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากขึ้นโดยลากเพิ่มเติมบางส่วนขึ้นคือ x และ y



$$b^2 = x^2 + y^2$$

$$\sin\theta = \frac{y}{b}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{b}$$

จากทฤษฎีของไพทาโกรัส จะได้

$$R^2 = (a + x)^2 + y^2$$

$$R^2 = a^2 + 2ax + x^2 + y^2$$

$$R^2 = a^2 + 2ax + b^2$$

$$R^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

หาทิศทาง จากตรีโกณมิติ

$$\tan\alpha = \frac{y}{a + x}$$

$$= \frac{b\sin\theta}{a + b\cos\theta}$$

$$\tan\alpha = \frac{b\sin\theta}{a + b\cos\theta}$$

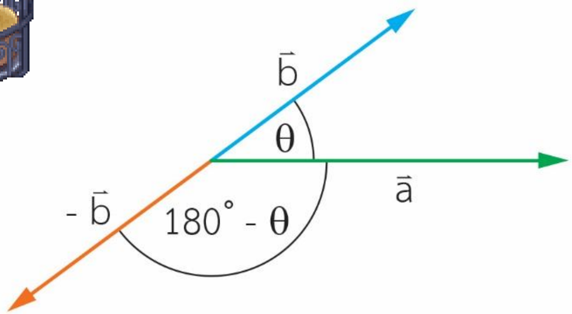
สรุปได้ว่า การคำนวณผลบวกของเวกเตอร์

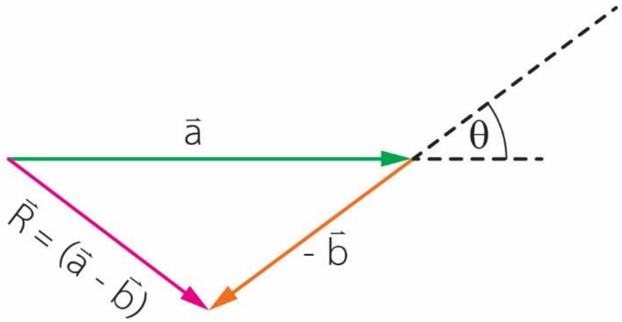
หาขนาดเวกเตอร์ลัพธ์ได้จากสูตร $\|\vec{R}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$

หาทิศทางได้จากสูตร $\tan\alpha = \dfrac{b\sin\theta}{a + b\cos\theta}$

นอกจากนี้เรายังนำมาใช้กับการลบเวกเตอร์ได้ เพราะการลบเวกเตอร์ก็คือ การบวกด้วยเวกเตอร์ลบ

$$\vec{a} - \vec{b} \quad = \quad \vec{a} + (-\vec{b})$$





เมื่อเวกเตอร์ $\vec{b}$ ทำมุมกับ $\vec{a}$ มีค่า θ เวกเตอร์ $-\vec{b}$ จะทำมุมกับเวกเตอร์ $\vec{a}$ เท่ากับ $180^\circ - \theta$ เพราะ $\vec{b}$ กับ $-\vec{b}$ ทิศทางตรงข้ามกัน เมื่อแทนค่า θ ด้วย $180^\circ - \theta$ ค่าของ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$ ค่าของ $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

หาขนาดเวกเตอร์ลัพธ์ได้จากสูตร $\quad \|\vec{R}\|(\vec{a} - \vec{b}) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$

หาทิศทางได้จากสูตร $\quad \tan\alpha = \dfrac{-b\sin\theta}{a - b\cos\theta}$

การคำนวณการบวกเวกเตอร์จะนำไปใช้ในเรื่องของการรวมแรงและการหาผลรวมของโมเมนตัมต่อไป

ตัวอย่าง

$\vec{a}$ มีขนาด 50 เมตร $\vec{b}$ มีขนาด 30 เมตร ทำมุมกัน 60 องศา จงหาขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์

ก. เมื่อนำเวกเตอร์ทั้งสองมาบวกกัน

ข. เมื่อนำเวกเตอร์ทั้งสองมาลบกัน

วิธีทำ

ก. เมื่อนำเวกเตอร์ทั้งสองมาบวกกัน

จากสูตร
$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta} \\
&= \sqrt{50^2 + 30^2 + (2)(50)(30)(\cos 60^\circ)} \\
&= \sqrt{2{,}500 + 900 + 3{,}000(0.5)} \\
&= \sqrt{3{,}400 + 1{,}500} \\
&= \sqrt{4{,}900} \\
&= 70 \text{ เมตร}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ เวกเตอร์ลัพธ์มีขนาด 70 เมตร

ข. เมื่อนำเวกเตอร์ทั้งสองมาลบกัน

จากสูตร
$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta} \\
&= \sqrt{50^2 + 30^2 - (2)(50)(30)(\cos 60^\circ)} \\
&= \sqrt{2{,}500 + 900 - 3{,}000(0.5)} \\
&= \sqrt{3{,}400 - 1{,}500} \\
&= \sqrt{1{,}900} \\
&= 43.59 \text{ เมตร}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ เวกเตอร์ลัพธ์มีขนาด 43.59 เมตร

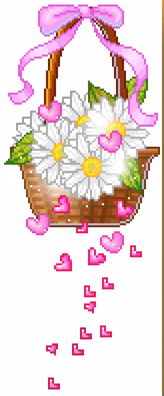
2.2 การบวกเวกเตอร์โดยการหาผลบวกขององค์ประกอบเวกเตอร์ ในกรณีที่มีเวกเตอร์มากกว่า 2 เวกเตอร์ขึ้นไปการคำนวณหาเวกเตอร์ลัพธ์จะใช้วิธีการหาองค์ประกอบในแนวแกน x และ y ของเวกเตอร์แต่ละตัว จากนั้นนำองค์ประกอบในแกน x และ y ของแต่ละเวกเตอร์มารวมกัน ซึ่งจะรวมกันได้เหมือนกับการบวกตัวเลข เพราะมีทิศทางแนวเดียวกัน จะได้

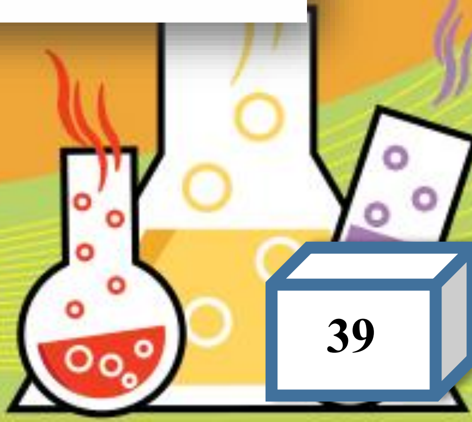
ผลบวกเวกเตอร์ทางแกน x, $R_x = a_x + b_x + c_x + \dots$

ผลบวกเวกเตอร์ทางแกน y, $R_y = a_y + b_y + c_y + \dots$

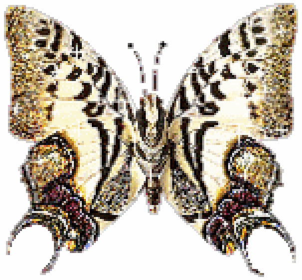
หาผลบวกของเวกเตอร์ลัพธ์ จาก

$$\|\bar{R}\| = \sqrt{(\text{ผลบวกเวกเตอร์ทางแกน x})^2 + (\text{ผลบวกเวกเตอร์ทางแกน y})^2}$$





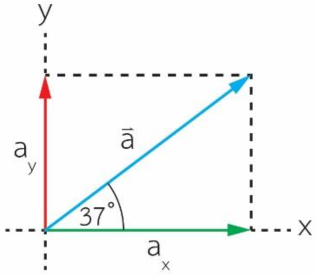
ตัวอย่าง



จงหาผลบวกของเวกเตอร์ในแนวแกน x และ y

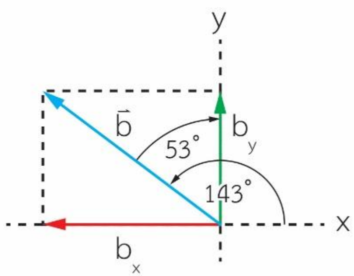
กำหนดให้	$\vec{a}$	มีขนาด	10	เมตร ทำมุม	37°
	$\vec{b}$	มีขนาด	20	เมตร ทำมุม	143°
	$\vec{c}$	มีขนาด	20	เมตร ทำมุม	180°
	$\vec{d}$	มีขนาด	10	เมตร ทำมุม	233°

วิธีทำ



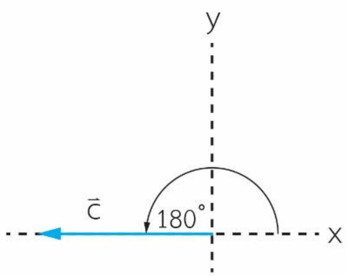
$a_x = a\cos 37^\circ = (10)(0.8) = 8\ \text{m}$

$a_y = a\sin 37^\circ = (10)(0.6) = 6\ \text{m}$



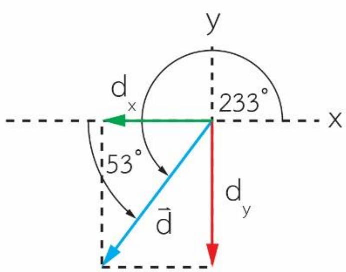
$b_x = -\,b\sin 53^\circ = (-\,20)(0.8) = -\,16\ \text{m}$

$b_y = b\cos 53^\circ = (20)(0.6) = 12\ \text{m}$



$c_x = -\,20\ \text{m}$

$c_y = 0\ \text{m}$



$d_x = -\,d\cos 53^\circ = (-\,10)(0.6) = -\,6\ \text{m}$

$d_y = -\,d\sin 53^\circ = (-10)(0.8) = -\,8\ \text{m}$

หาผลบวกทางแกน x

$$R_x = a_x + b_x + c_x + d_x$$
$$= 8 + (-16) + (-20) + (-6)$$
$$R_x = -34 \text{ เมตร}$$

$\therefore$ ผลรวมของเวกเตอร์ในแนวแกน x = - 34 เมตร

หาผลบวกทางแกน y

$$R_y = a_y + b_y + c_y + d_y$$
$$= 6 + 12 + 0 + (-8)$$
$$R_y = 10 \text{ เมตร}$$

$\therefore$ ผลรวมของเวกเตอร์ในแนวแกน y = 10 เมตร

สรุปท้ายหน่วย

1 หน่วยของการวัด

หน่วยในระบบ SI แบ่งเป็น 3 ประเภท

1.1 หน่วยฐาน เป็นหน่วยเบื้องต้นของปริมาณต่างๆ

1.2 หน่วยเสริม เป็นหน่วยในการวัดมุม

1.3 หน่วยอนุพัทธ์ เป็นหน่วยที่เกิดจากหน่วยฐานมาผสมกัน อาจจะตั้งชื่อเป็นหน่วยใหม่ขึ้นเพื่อสะดวกในการเรียก

2 คำนำหน้าหน่วย

เป็นคำที่ใช้แทนเลข 10 ยกกำลังเป็นจำนวนเต็ม ใช้นำหน้าหน่วยเพื่อให้หน่วยมีขนาดใหญ่ขึ้นหรือเล็กลงตามค่าของเลข 10 ยกกำลังที่ใช้คูณหน่วยนั้น

3 ปริมาณเวกเตอร์

เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทางซึ่งมีลักษณะแตกต่างจากปริมาณสเกลาร์ที่ใช้ทั่วๆ ไป

3.1 การเขียนเวกเตอร์

- เขียนแบบบรรยาย
- เขียนแบบลูกศร

3.2 การหาองค์ประกอบเวกเตอร์ในระบบแกน 2 มิติทำมุมกับแกนไหน ค่าทางแกนนั้นจะเป็นผลคูณของเวกเตอร์กับค่าฟังก์ชัน cosine ของมุมนั้น ส่วนอีกแกนจะเป็นผลคูณของเวกเตอร์กับค่าฟังก์ชัน sine ของมุมนั้น

3.3 การบวกเวกเตอร์

- การบวกโดยการวาดรูป
  เอาหางต่อกับหัวของเวกเตอร์เรียงไปเรื่อยๆ
- การบวกโดยการคำนวณ

1. การบวก 2 เวกเตอร์

สูตร $\|\vec{R}\| = (\vec{a} + \vec{b}) \quad = \quad \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$

$$\tan\alpha = \frac{b\sin\theta}{a + b\cos\theta}$$

$$\|\vec{R}\| = (\vec{a} - \vec{b}) \quad = \quad \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

$$\tan\alpha = \frac{-b\sin\theta}{a - b\cos\theta}$$

2. การหาผลบวกขององค์ประกอบของเวกเตอร์

ผลบวกทางแกน x, $R_x = a_x + b_x + c_x + \dots$

ผลบวกทางแกน y, $R_y = a_y + b_y + c_y + \dots$

หา R ได้จาก $R = \sqrt{R_x^2 + R_x^2}$

หาทิศทาง ได้จาก

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$