ใบความรู้ 1

เวกเตอร์ (Vectors)

ปริมาณในทางฟิสิกส์ มี 2 ปริมาณ คือ

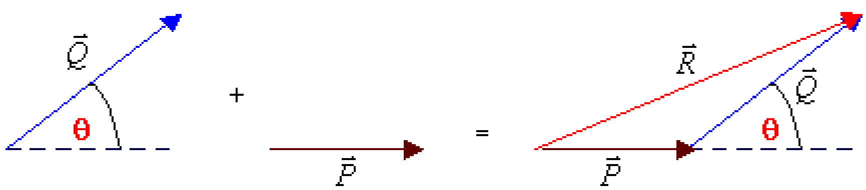
1. ปริมาณสเกลาร์ (Scalar) เป็นปริมาณที่บอกขนาดเพียงอย่างเดียว เช่น มวล , อัตราเร็ว , พลังงาน ฯลฯ

2. ปริมาณเวกเตอร์ (Vector) เป็นปริมาณที่บอกทั้งขนาดและทิศทาง เช่น ความเร็ว , ความเร่ง , การกระจัด , แรง ฯลฯ

1. การรวมเวกเตอร์

การรวมเวกเตอร์ หมายถึง การบวกหรือลบกันของเวกเตอร์ตั้งแต่ 2 เวกเตอร์ ขึ้นไป ผลลัพธ์ที่ได้เป็นปริมาณเวกเตอร์ เรียกว่า เวกเตอร์ลัพธ์ (Resultant Vector) ซึ่งพิจารณาได้ ดังนี้

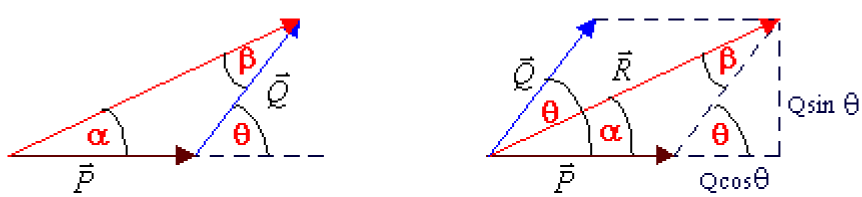
1.1 การบวกเวกเตอร์โดยวิธีการเขียนรูป ทำได้โดยเขียนเวกเตอร์ที่เป็นตัวตั้ง จากนั้นเอาหางของเวกเตอร์ที่เป็นผลบวกหรือผลต่าง มาต่อกับหัวของเวกเตอร์ตัวตั้ง โดยเขียนให้ถูกต้องทั้งขนาดและทิศทาง เวกเตอร์ลัพธ์หาได้โดยการวัดระยะทาง จากหางเวกเตอร์แรกไปยังหัวเวกเตอร์สุดท้าย



จากรูป เวกเตอร $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

1.2 การบวกเวกเตอร์โดยใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์

ให้ เวกเตอร์ $\vec{P}$ ทำมุมกับ $\vec{Q}$ เป็นมุม q คำนวณหาเวกเตอร์ลัพธ์ได้ ดังนี้



ขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์คำนวณได้จากกฎของโคไซน์

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta} \qquad (1)$$

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\sin(180 - \theta)}$$

ทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์หาได้จาก

$$a = \tan^{-1}\left(\frac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta}\right) \qquad (2)$$

หรือหาได้จากกฎของไซน์ ดังนี้

$$\frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(180-\theta)} \qquad (3)$$

ข้อสังเกต จากสมการที่ (1) พบว่า

เมื่อ $q = 0^{\circ}$ (คือ $\vec{P}$ และ $\vec{Q}$ อยู่ในทิศทางเดียวกัน) จะได้ขนาดของ $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ โดยทิศทางของ $\vec{R}$ มีทิศเดียวกับ $\vec{P}$ และ $\vec{Q}$

เมื่อ เมื่อ $q = 180^{\circ}$

2.1 ถ้า $\vec{P} > \vec{Q}$ จะได้ $\vec{R} = \vec{P} - \vec{Q}$ และ $\vec{R}$ มีทิศเดียวกับ $\vec{P}$

2.2 ถ้า $\vec{P} < \vec{Q}$ จะได้ $\vec{R} = \vec{Q} - \vec{P}$ และ $\vec{R}$ มีทิศเดียวกับ $\vec{Q}$

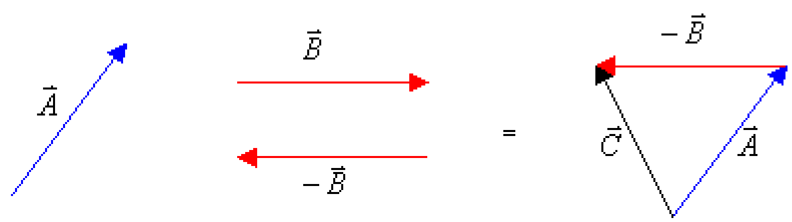
3. เมื่อ $q = 90^{\circ}$ จะได้

ขนาด $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ และ $\quad a = \tan^{-1}\left(\frac{Q}{P}\right)$

1.3 การลบเวกเตอร์

การลบเวกเตอร์ สามารถหาเวกเตอร์ลัพธ์ได้เช่นเดียวกับการบวกเวกเตอร์ แต่ให้กลับทิศทางของเวกเตอร์ตัวลบ ดังนี้

ถ้า $\quad \vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \qquad (4)$



2. เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector)

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย หมายถึง เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยในทิศทางใดๆ เช่น เวกเตอร์ $\vec{A}$ สามารถเขียนได้ด้วยขนาดของ $\vec{A}$ คูณกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $(\hat{e}_A)$ ซึ่งมีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$ คือ

$$\vec{A} = A\hat{e}_A$$

หรือ $\quad \hat{e}_A = \frac{\vec{A}}{A} \qquad (5)$

โดย $(\hat{e}_A)$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและทิศเดียวกันกับ $\vec{A}$

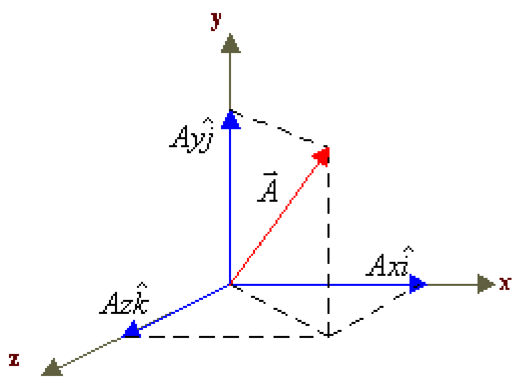
ในระบบแกนมุมฉาก เวกเตอร์หนึ่งหน่วยบนแกน x , y และ z แทนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ และ $\hat{k}$ตามลำดับ จะได้

$$\hat{\imath} = \frac{\vec{A}_x}{A_x} ; \hat{\jmath} = \frac{\vec{A}_y}{A_y} ; \hat{k} = \frac{\vec{A}_z}{A_z} \quad 6)$$

เมื่อ $\vec{A}_x$ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ A_x มีทิศทางตามแนวแกน x

$\vec{A}_y$ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ A_y มีทิศทางตามแนวแกน y

$\vec{A}_z$ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ A_z มีทิศทางตามแนวแกน z



3. เวกเตอร์องค์ประกอบ (Component Vector)

3.1 องค์ประกอบของเวกเตอร์ใน 2 มิติ

ถ้า $\vec{A}$ อยู่ในระนาบ x , y โดย $\vec{A}$ ทำมุม q กับแกน x

องค์ประกอบของ $\vec{A}$ ตามแกน x คือ A_x โดย $A_x = Acos\theta$

องค์ประกอบของ $\vec{A}$ ตามแกน y คือ A_y โดย $A_y = Asin\theta$

ดังนั้น เวกเตอร์ $\vec{A}$ เขียนแยกเป็นองค์ประกอบได้ ดังนี้

$$\vec{A} = A_{x\hat{\imath}} + A_{y\hat{\jmath}} \quad 7)$$

หรือ

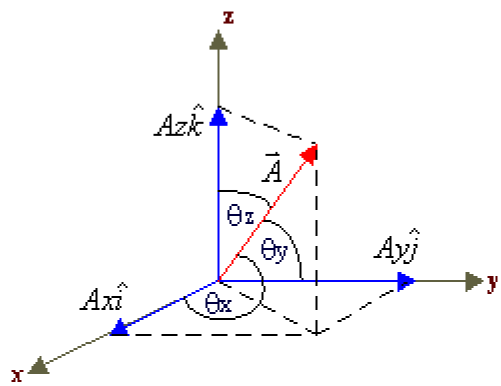
$$\vec{A} = A\cos\theta\,\hat{\imath} + A\cos\theta\,\hat{\jmath}$$

โดยที่ ขนาดของ $\vec{A}$

$$\vec{A} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (8)$$

3.2 องค์ประกอบของเวกเตอร์ใน 3 มิติ

กำหนดให้ $\vec{A}$ อยู่บนระนาบ x , y ,z โดยเวกเตอร์ $\vec{A}$ ทำมุมกับแกน x , y , z เป็นมุม θ_x , θ_y , θ_z ตามลำดับ เวกเตอร์ $\vec{A}$ สามารถแยกเป็นองค์ประกอบตามแกน x , y , z ได้ ดังนี้



ขนาดของ $\vec{A}_x$ แทนด้วย $A_x = A\cos\theta_x$ โดยที่ $\cos\theta_x = \frac{A_x}{A}$

ขนาดของ $\vec{A}_y$ แทนด้วย $A_y = A\cos\theta_y$ โดยที่ $\cos\theta_y = \frac{A_y}{A}$

ขนาดของ $\vec{A}_z$ แทนด้วย $A_z = A\cos\theta_z$ โดยที่ $\cos\theta_z = \frac{A_z}{A}$

ดังนั้น $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$

$$\vec{A} = A\cos\theta_x\,\hat{\imath} + A\cos\theta_y\,\hat{\jmath} + A\cos\theta_z\,\hat{k}$$

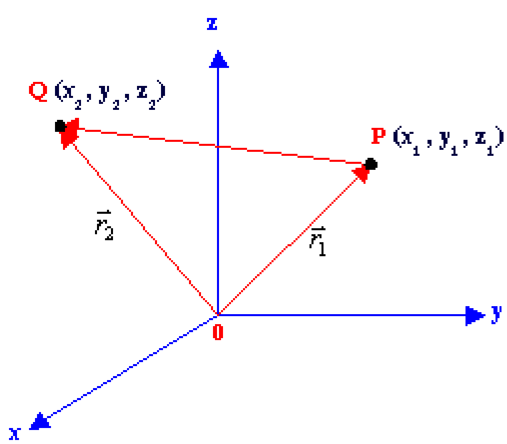
ขนาด $\vec{A}$ คือ $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ 9)

ทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{A}$ คือ มุมที่ $\vec{A}$ ทำกับแกน x , y , z หาได้จาก

$$\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{A_x}{A}\right);\ \theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{A_y}{A}\right);\ \theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{A_z}{A}\right)$$

4. เวกเตอร์ตำแหน่ง (Position Vector)

เวกเตอร์ตำแหน่ง หมายถึง เวกเตอร์ที่บอกตำแหน่งของวัตถุเทียบกับจุดใดจุดหนึ่ง เรียกว่า จุดอ้างอิง



จากรูป เวกเตอร์ $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด P และ Q เทียบกับจุด O ในระบบพิกัด โดย

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP} = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k}$$
$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OQ} = x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k}$$
$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

จะได้ $$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

โดยขนาดของ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $$\overrightarrow{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2\hat{\imath} + (y_2 - y_1)^2\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)^2\hat{k}} \qquad (11)$$

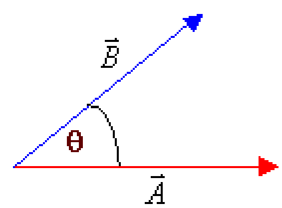
ทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ หาได้จาก

$$\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{x_2-x_1}{PQ}\right);\ \theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{y_2-y_1}{PQ}\right);\ \theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{z_2-z_1}{PQ}\right) \qquad (12)$$

5. การคูณเวกเตอร์ มี 2 แบบ ดังนี้

5.1 ผลคูณสเกลาร์ (Scalar product หรือ dot product แทนด้วยเครื่องหมาย " • ")

กำหนดให้ $\vec{A}$ ทำมุม θ กับ $\vec{B}$ ผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์ทั้งสองมีนิยาม ดังนี้



โดยที่ A และ B เป็นขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ตามลำดับ

θ คือ มุมระหว่างเวกเตอร์ A กับ B

คุณสมบัติของผลคูณแบบสเกลาร์

ถ้า $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ และ $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ เป็น unit vector ในแนวแกน x , y ,z จะได้ว่า

คุณสมบัติของผลคูณแบบสเกลาร์

ถ้า $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ และ $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ เป็น unit vector ในแนวแกน x , y , z จะได้ว่า

1. $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$
2. $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$
3. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
4. $\vec{A} \cdot \vec{B} = O$ ถ้า $\vec{A} \neq 0$ และ $\vec{B} \neq 0$ แสดงว่า A ⊥ B

5. $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{B})+(\vec{A}\cdot\vec{C})$

6. $a(\vec{A}\cdot\vec{B}) = a(\vec{A})\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot(a\vec{B})$ โดยที่ a เป็นปริมาณสเกลาร์

7. ถ้า $\vec{A} = A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k}$; $\vec{B} = B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}+B_z\hat{k}$ จะได้ $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

โดยที่ $\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ เพราะ $\cos 0^\circ = 1$

$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{\imath} = 0$ เพราะ $\cos 90^\circ = 0$

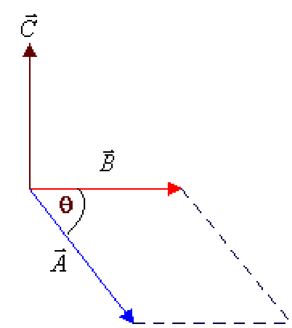
ผลคูณเวกเตอร์ (Vector Product หรือ Cross Product แทนด้วยเครื่องหมาย “x”)

กำหนดให้ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์ที่ทำมุม q ต่อกัน และ $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ลัพธ์ โดย

$$\vec{C} = \vec{A}\, x\, \vec{B}$$

ขนาดของ $\vec{C}$ มีนิยามว่า $C = AB\sin\theta$

ทิศทางของ $\vec{C}$ หาได้โดยใช้กฎมือขวา โดยปลายนิ้วทั้งสี่แทนทิศทางของ $\vec{A}$ และหมุนไปหา $\vec{B}$ จะได้นิ้วหัวแม่มือแทนทิศทางของ $\vec{C}$



คุณสมบัติของผลคูณแบบเวกเตอร์

1. $\vec{A}\, x\, \vec{A} = 0$

2. $\vec{A}\, x\, \vec{B} = -(\vec{B}\, x\, \vec{A})$

3. $\vec{A}\, x\, \vec{B} = 0$ ถ้า $\vec{A} \neq 0$ และ $\vec{B} \neq 0$ แสดงว่า $A//B$

4. $\vec{A}\, x\, (\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}\, x\, \vec{B}) + (\vec{A}\, x\, \vec{C})$ ถ้า $\vec{A} = A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k}$; $\vec{B} = B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}+B_z\hat{k}$

5. จะได้ $\vec{A}\, x\vec{B} = (A_yB_x - A_zB_y)\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$

โดยที่ $\hat{\imath}\, x\, \hat{\imath} = \hat{\jmath}\, x\, j = \hat{k}\, x\, \hat{k} = 0$

$\hat{\imath}\, x\, \hat{\jmath} = \hat{k}$; $\hat{\jmath}\, x\, \hat{k} = \hat{\imath}$; $\hat{k}\, x\, \hat{\imath} = \hat{\jmath}$

$\hat{\jmath}\, x\, \hat{\imath} = -\hat{k}$; $\hat{k}\, x\, \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$; $\hat{\imath}\, x\, \hat{k} = -\hat{\jmath}$

6. การหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์

ถ้าเวกเตอร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ U ดังนั้น จะได้

1. $\frac{d}{du}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{dA}{du} + \frac{dB}{du}$

2. $\frac{d}{du}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=A\frac{dB}{du}+B\frac{dA}{du}$
3. $\frac{d}{du}\left(\vec{A}x\vec{B}\right)=\vec{A}\,x\frac{d\vec{B}}{du}+\vec{B}\,x\frac{d\vec{A}}{du}$
4. $\frac{d}{du}\left(a\vec{A}\right)=a\frac{d\vec{A}}{du}+\frac{da}{du}\vec{A}$
5. $\frac{d}{du}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}x\,\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{B}x\frac{d\vec{C}}{du}\right)+\left(\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du}x\,\vec{C}\right)+\left(\frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B}x\vec{C}\right)$

เอกสาร้างอ้างอิง

https://www.rsu.ac.th/science/physics/kan/general_phy/vector/vector.htm

https://www.rsu.ac.th/science/physics/pom/physics1/pdf/vector.pdf

https://kulazaza.wordpress.com/2013/06/17/%E0%B9%80%E0%B8%A7%E0%B8%81%E0%B9%80%E0%B8%95%E0%B8%AD%E0%B8%A3%E0%B9%8C-vectors/

https://th.wikipedia.org/wiki/%E0%B9%80%E0%B8%A7%E0%B8%81%E0%B9%80%E0%B8%95%E0%B8%AD%E0%B8%A3%E0%B9%8C

https://sites.google.com/site/physicsforgu/fisiks