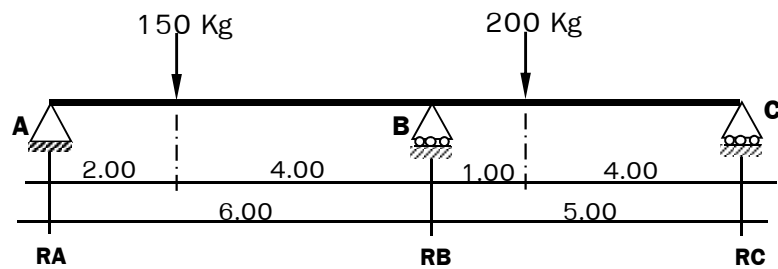
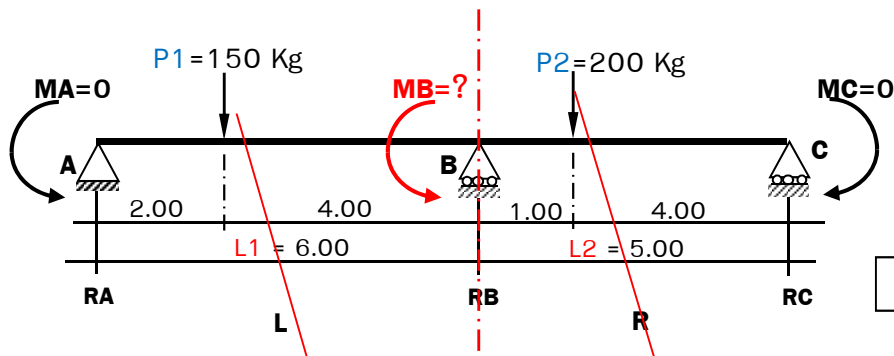


ตัวอย่างที่ 1. จงหาแรงโมเมนต์เสากลาง (MB) และแรงปฏิกิริยาที่เสา RA RB และ RC ดังรูปข้างล่าง



1. หาแรงโมเมนต์เสากลาง MB



เรารู้อะไรบ้างจากโจทย์

1. เสาริมซ้าย RA ไม่มีคานยื่น ดังนั้น แรงโมเมนต์ $MA = 0 \text{ Kg-m}$
2. เสาริมขวา RC ไม่มีคานยื่น ดังนั้น แรงโมเมนต์ $MC = 0 \text{ Kg-m}$
3. คานด้านซ้าย A-B ความยาว $L1 = 6.00 \text{ ม.}$
4. คานด้านขวา B-C ความยาว $L2 = 5.00 \text{ ม.}$
5. LOAD คานด้านซ้ายเป็นแบบ Point Load (P1) ลงไม่กึ่งกลางคาน
6. LOAD คานด้านขวาเป็นแบบ Point Load (P2) ลงไม่กึ่งกลางคาน เช่นกัน

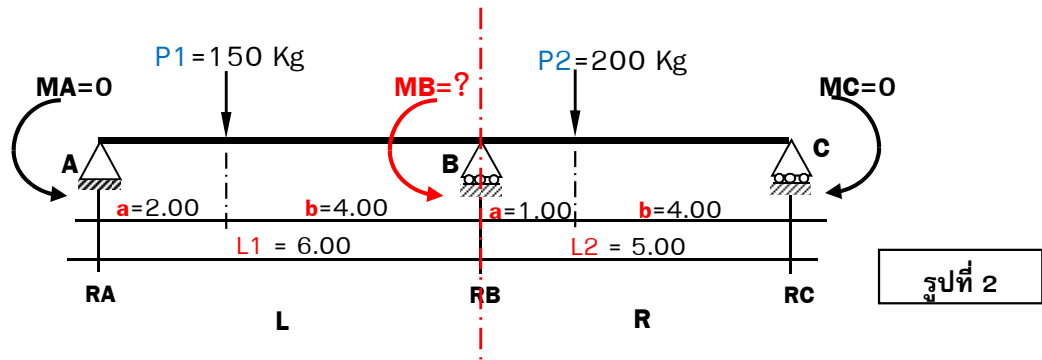
จากสมการ Three Moment

$$MAL1 + 2 MB (L1 + L2) + MCL2 = - \frac{Pa}{L} (L^2 - a^2) - \frac{Pb}{L} (L^2 - b^2)$$

LEFT SPAN คานด้านซ้าย	ลักษณะของน้ำหนักบรรทุก	RIGHT SPAN คานด้านขวา
$-\frac{Pa}{L} (L^2 - a^2)$		$-\frac{Pb}{L} (L^2 - b^2)$
น้ำหนักชนิด Point Load กระทำไม่กึ่งกลางคาน		

จะได้

$$MAL1 + 2 MB (L1 + L2) + MCL2 = - \frac{P1a}{L1} (L1^2 - a^2) - \frac{P2b}{L2} (L2^2 - b^2)$$



แทนค่าสูตร

$$MAL_1 + 2 MB (L_1 + L_2) + MCL_2 = - \frac{P_1 a}{L_1} (L_1^2 - b^2) - \frac{P_2 b}{L_2} (L_2^2 - a^2)$$

$$(0 \times 6) + 2 MB (6 + 5) + (0 \times 5) = - \frac{(150 \times 2) \times (6^2 - 4^2)}{6} - \frac{(200 \times 4) \times (5^2 - 1^2)}{5}$$

$$0 + 2 MB (11) + 0 = - \frac{(300) \times (36 - 16)}{6} - \frac{(800) \times (25 - 1)}{5}$$

$$22 MB = - \frac{300 \times 20}{6} - \frac{800 \times 24}{5}$$

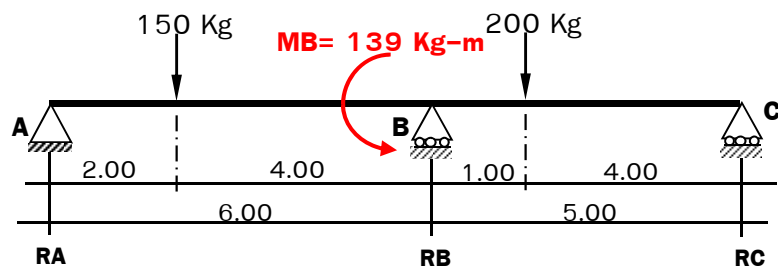
$$22 MB = -1,600 - 3,840$$

$$22 MB = -5,440$$

$$MB = -5,440 / 22$$

$$MB = -247.27$$

$$MB > -139 \text{ Kg-m} \quad \text{ตอบ}$$



2. หาแรงปฏิกิริยาที่เสา

จากรูปที่ 3 เราทราบค่าแรงโมเมนต์เสากลาง **MB** แล้วเท่ากับ 139 Kg-m (ทำไมจากรูปที่ 3 ค่าแรงโมเมนต์ MB จึงไม่มีเครื่องหมายติดลบ (-) เพราะจากรูปได้ใช้ **สูตรแทน** เครื่องหมายติดลบ แล้ว จึงไม่ต้องแสดงค่าติดลบที่แรงอีก)

ในการหาแรงปฏิกิริยาที่เสา ค่าแรงโมเมนต์เสากลาง **MB** จะเป็นตัวเชื่อมในการหาค่าแรงปฏิกิริยา เมื่อมีการแยกคานในการหาค่าแรง

2.1 หาน้ำหนัก (LOAD) ลงคานต่อเนื่อง

กรณีคานน้ำหนัก (LOAD) ลงคาน ใช้ดังนี้

2.1.1 น้ำหนักกระทำเป็นจุด (Point Load) ใช้ค่าน้ำหนักได้เลย = P

2.1.2 น้ำหนักแผ่เฉลี่ย (Uniform Load) ใช้ค่าน้ำหนัก = $(w \times L)$

จากรูปที่ 3 มีน้ำหนัก (LOAD) ลงกระทำต่อคานต่อเนื่อง A-B-C อยู่ 2 ตัวคือ P_1 และ P_2

ดังนั้น $\text{LOAD ON BEAM} = P_1 + P_2$
 $= 150 + 200$
 $= 350 \text{ Kg}$

ตอบ

แสดงว่า มีน้ำหนัก (LOAD) ทำลงคาน เท่ากับ 350 Kg ดังนั้น แรงปฏิกิริยาที่เสา $RA + RB + RC$ ต้องเท่ากับ 350 Kg พอดี

2.2 หาแรงปฏิกิริยาเสา RA (ความรู้เดิม ที่ต้องรู้เรื่อง แรงโมเมนต์)

การหาแรงปฏิกิริยา (Reaction Force) เราใช้สมการ

$\Sigma M(\text{รอบจุด}) = 0$ หมายถึง ผลรวมแรงโมเมนต์ (รอบจุดที่กำหนด) มีค่าเท่ากับ $= 0$

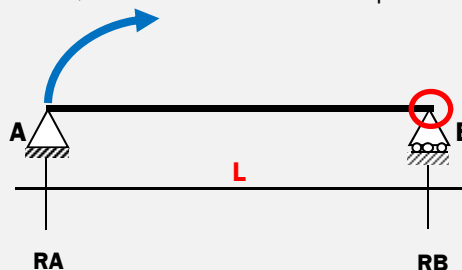
แรงโมเมนต์ (M) = แรง (Force) $\times$ ระยะทางตั้งฉาก (ถึงจุดหมุน)
 $M = F \times L$ (หน่วยเป็น กก. หรือ Kg)

แรงหรือน้ำหนัก ในการคำนวณ มีอยู่ 2 ชนิด

2.2.1 แรงหรือน้ำหนัก กระทำเป็นจุด (Point Load) ตัวอย่าง P

เมื่อทำเป็นแรงโมเมนต์ เท่ากับ $= (P \times L)$

เช่น $\Sigma M(B) = 0$ (ผลรวมแรงโมเมนต์ รอบจุด B = 0)



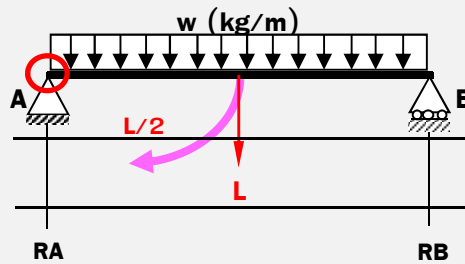
ดังนั้น $\text{แรงโมเมนต์ RA} = (RA \times L)$

ข้อควรจำ : แรง Point Load ใดๆ ถ้าวิ่งผ่านจุดหมุน จะมีค่าเป็น 0 ไม่ต้องมารวมคำนวณในสมการด้วย
กรณีนี้ คือ แรง RB (ไม่นำมารวมคำนวณในสมการด้วย)

2.2.2 แรงหรือน้ำหนัก แผ่เฉลี่ย (Uniform Load) ตัวอย่าง w

เมื่อทำเป็นแรงโมเมนต์ เท่ากับ $= (w \times L \times L/2)$

เช่น $\Sigma M(A) = 0$



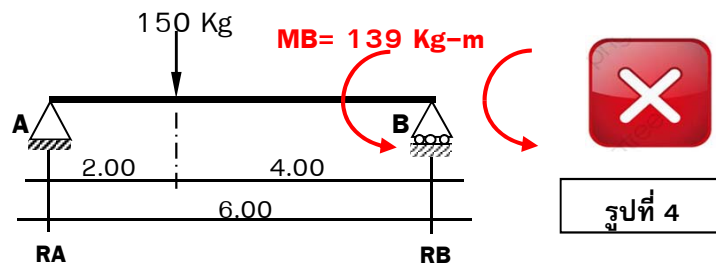
ดังนั้น

$$\text{แรงโมเมนต์ } w = (w \times L \times L/2)$$

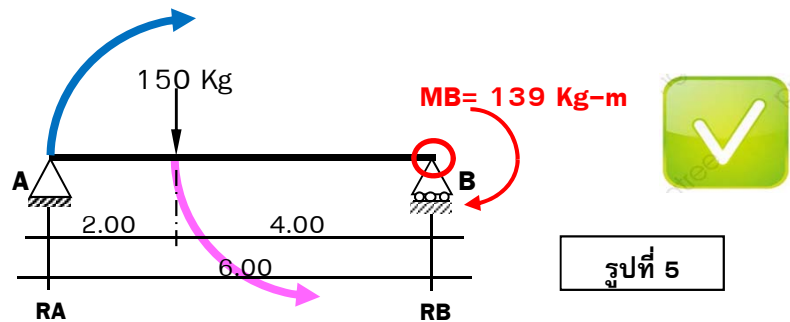
ข้อควรจำ : แรง Point Load ใดๆ ถ้าวิ่งผ่านจุดหมุน จะมีค่าเป็น 0 ไม่ต้องมารวมคำนวณในสมการด้วย
กรณีนี้ คือ แรง **RA** (ไม่นำมารวมคำนวณในสมการด้วย)

2.2.3 ตัดแยกคาน A-B ออก โดยแยกที่ B เมื่อแยกคานที่ B ต้องนำค่าแรงโมเมนต์ MB

มารวมคำนวณด้วย ดังรูปที่ 4



จากรูปที่ 4 ลูกศรแรงโมเมนต์ **MB** วิ่งผ่าเข้าไปในคาน A-B อย่างนี้ไม่ได้ จะต้องทำการเปลี่ยนทิศทางลูกศรใหม่ ดังรูปที่ 5



ข้อควรจำ : แรง Point Load ใดๆ ถ้าวิ่งผ่านจุดหมุน จะมีค่าเป็น 0 ไม่ต้องมารวมคำนวณในสมการด้วย

แรงโมเมนต์ที่ถูกต้อง ต้องอยู่นอกคานและทิศทางลูกศรวิ่งเข้าหาคานด้วย

2.2.4 ใช้สมการ $\Sigma MB = 0$, แรงหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็น +

$$(RA \times 6) + 139 - (150 \times 4) = 0$$

(เนื่องจากแรงโมเมนต์ **MB** เป็นแรงโมเมนต์อยู่แล้วไม่ต้องมีระยะทางนำแรงมาใช้ได้เลย)

$$6RA + 139 - 600 = 0$$

$$6RA = 600 - 139$$

$$RA = 461/6$$

$$RA = 76.83 \text{ Kg}$$

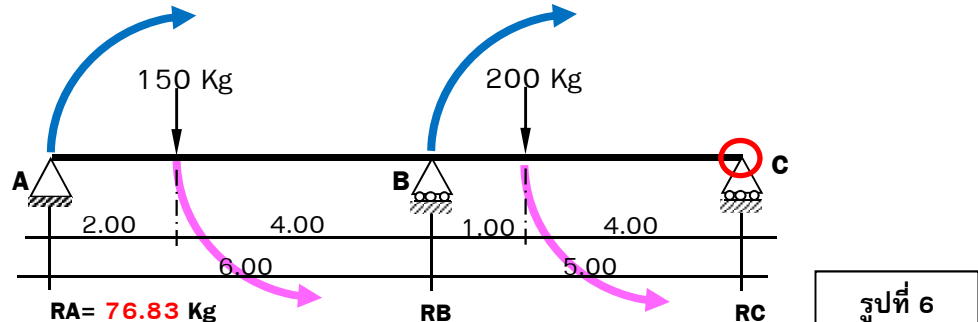
แรงปฏิกิริยา RA ที่หาค่าออกมาได้เท่ากับ 76.83 Kg นั้นเรายังไม่ทราบว่าใช่หรือไม่ เพียงแต่

คิดว่า ถูกไว้ก่อน เพราะแรงปฏิกิริยา RA ค่ายังไม่เกิน LOAD ON BEAM (ที่ 350 Kg)

2.3 หาแรงปฏิกิริยาเสา RB (พิจารณาตอน A-B-C)

จากรูปที่ 3 เราทราบค่าแรงปฏิกิริยา RA แล้ว จะทำการหาค่าแรงปฏิกิริยาที่เสา RB ต่อโดยใช้

2.3.1 ใช้สมการ $\Sigma MC = 0$, แรงหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็น + (ดูรูปที่ 6)



จากรูปที่ 6 เรารู้ว่า **พิจารณา** ตอน A-B-C แต่ไม่ได้บอกว่า **แยกตอน** ดังนั้นเมื่อเรา **ไม่ได้** แยกตอน ก็ไม่มีความจำเป็นต้องใช้แรงโมเมนต์ MB มาร่วมคำนวณด้วย (แรงโมเมนต์ MB จะนำมาใช้เมื่อมีการแยกตอนที่จุด B เท่านั้น)

$\Sigma MC = 0$, แรงหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็น +

ข้อควรจำ : แรง Point Load ใดๆ ถ้าวิ่งผ่านจุดหมุน จะมีค่าเป็น 0 ไม่ต้องมารวมคำนวณในสมการด้วย

กรณีนี้ คือ แรง RC (ไม่นำมารวมคำนวณในสมการด้วย)

$$(RB \times 5) + (76.83 \times 11) - (200 \times 4) - (150 \times 9) = 0$$

$$5RB + 845.13 - 800 - 1,350 = 0$$

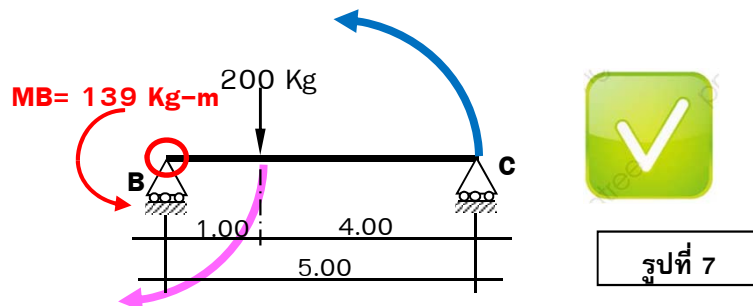
$$5RB = 800 + 1,350 - 845.13$$

$$RB = 1,304.87/5$$

$$RB = 260.97 \text{ Kg}$$

2.4 หาแรงปฏิกิริยาเสา RC

2.4.1 ต้องแยกตอน B-C ออก โดยแยกที่ B เมื่อแยกตอนที่ B ต้องนำค่าแรงโมเมนต์ MB มาร่วมคำนวณด้วย ดังรูปที่ 7



จากรูปที่ 7 ลูกศรแรงโมเมนต์ MB วิ่งหมุนอยู่นอกตอนอยู่แล้ว และวิ่งเข้าหาตอน B-C ด้วย จึงไม่ต้องดำเนินการใดๆ กับลูกศรของแรง ใช้คำนวณได้เลย

2.4.2 ใช้สมการ $\Sigma M_B = 0$,  แรงหมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็น +
 $(RC \times 5) + 139 - (200 \times 1) = 0$

(เนื่องจากแรงโมเมนต์ **MB** เป็นแรงโมเมนต์อยู่แล้วไม่ต้องมีระยะทางนำแรงมาใช้ได้เลย)

$$5RC + 139 - 200 = 0$$

$$5RC = 200 - 139$$

$$RC = 61/5$$

$$RC = 12.2 \text{ Kg}$$

2.5 ตรวจสอบแรงแนวดิ่ง

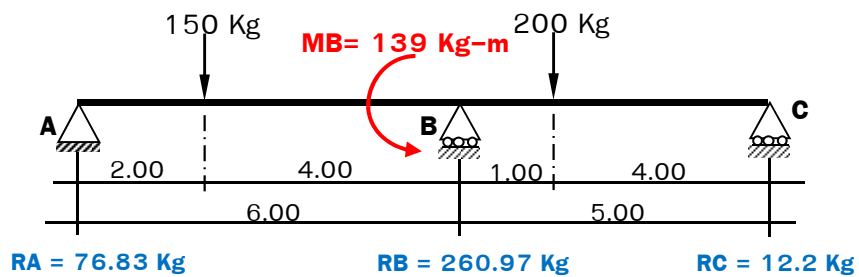
$$\text{LOAD ON BEAM} = \text{REACTION}$$

$$350 = RA + RB + RC$$

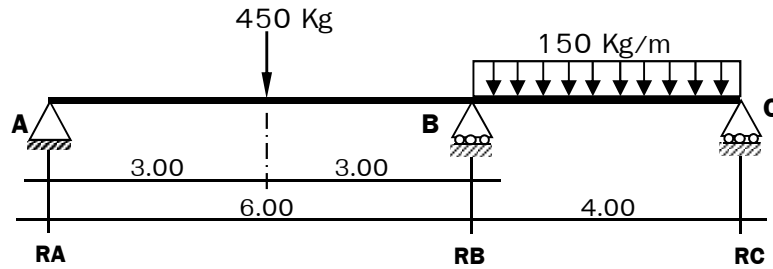
$$350 = 76.83 + 260.97 + 12.2$$

$$350 = 350 \quad \text{O.K.}$$

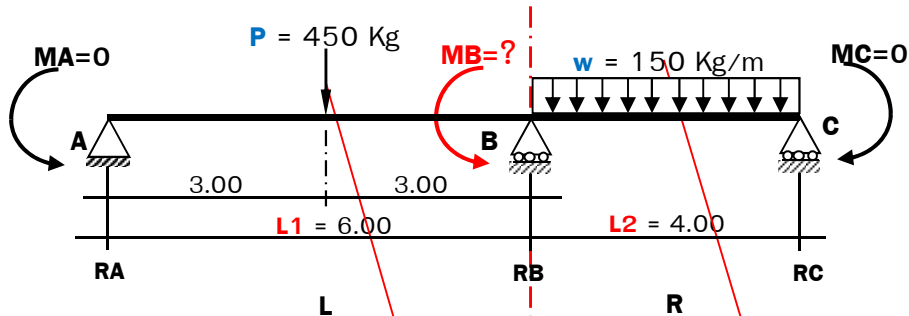
สรุปรูปแรง



ตัวอย่างที่ 1. จงหาแรงโมเมนต์เสากลาง (MB) และแรงปฏิกิริยาที่เสา RA RB และ RC ดังรูปข้างล่าง



1. หาแรงโมเมนต์เสากลาง MB



รูปที่ 1

เรารู้อะไรบ้างจากโจทย์

1. เสาริมซ้าย RA ไม่มีคานยื่น ดังนั้น แรงโมเมนต์ $MA = 0 \text{ Kg-m}$
2. เสาริมขวา RC ไม่มีคานยื่น ดังนั้น แรงโมเมนต์ $MC = 0 \text{ Kg-m}$
3. คานด้านซ้าย A-B ความยาว $L1 = 6.00 \text{ ม.}$
4. คานด้านขวา B-C ความยาว $L2 = 4.00 \text{ ม.}$
5. LOAD คานด้านซ้ายเป็นแบบ Point Load (P) ลงกึ่งกลางคาน
6. LOAD คานด้านขวาเป็นแบบ Uniform Load (w) ลงเต็มคาน

จากสมการ Three Moment

$$MA L1 + 2 MB (L1 + L2) + MC L2 =$$

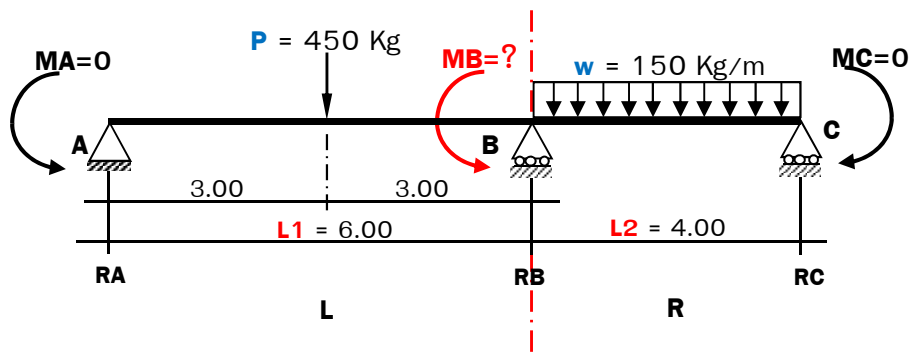
$$-\frac{3PL^2}{8}$$

$$-\frac{WL^3}{4}$$

LEFT SPAN คานด้านซ้าย	ลักษณะของน้ำหนักบรรทุก	RIGHT SPAN คานด้านขวา
$-\frac{3PL^2}{8}$		$-\frac{3PL^2}{8}$
$-\frac{WL^3}{4}$		$-\frac{WL^3}{4}$
	น้ำหนักชนิด Uniform Load กระทำเต็มคาน	

จะได้

$$MA L1 + 2 MB (L1 + L2) + MC L2 = - \frac{3PL^2}{8} - \frac{WL^3}{4}$$



$$MA L1 + 2 MB (L1 + L2) + MC L2 = - \frac{3PL1^2}{8} - \frac{WL2^3}{4}$$

แทนค่าสูตร

$$(0 \times 6) + 2 MB (6 + 4) + (0 \times 4) = - \frac{(3 \times 450 \times 6^2)}{8} - \frac{(150 \times 4^3)}{4}$$

$$0 + 2 MB (10) + 0 = - \frac{(3 \times 450 \times 36)}{8} - \frac{(150 \times 64)}{4}$$

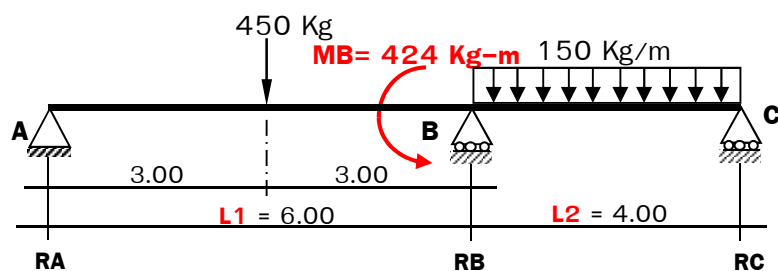
$$20 MB = -6,075 - 2,400$$

$$20 MB = -8,475$$

$$MB = -8,475/20$$

$$MB = -423.75$$

$$MB > -424 \text{ Kg-m} \quad \text{ตอบ}$$



2. หาแรงปฏิกิริยาที่เสา

จากรูปที่ 3 เราทราบค่าแรงโมเมนต์เสากลาง **MB** แล้วเท่ากับ 424 Kg-m (ทำไมจากรูปที่ 3 ค่าแรงโมเมนต์ MB จึงไม่มีเครื่องหมายติดลบ (-) เพราะจากรูปได้ใช้ **กฎครแทน** เครื่องหมายติดลบ แล้ว จึงไม่ต้องแสดงค่าติดลบที่แรงอีก)

ในการหาแรงปฏิกิริยาที่เสา ค่าแรงโมเมนต์เสากลาง **MB** จะเป็นตัวเชื่อมในการหาค่าแรงปฏิกิริยา เมื่อมีการแยกคานในการหาค่าแรง

2.1 หาน้ำหนัก (LOAD) ลงคานต่อเนื่อง

กรณีคาน้ำหนัก (LOAD) ลงคาน ใช้ดังนี้

2.1.1 น้ำหนักกระทำเป็นจุด (Point Load) ใช้คาน้ำหนักได้เลย = P

2.1.2 น้ำหนักแผ่เฉลี่ย (Uniform Load) ใช้คาน้ำหนัก = $(w \times L)$

จากรูปที่ 3 มีน้ำหนัก (LOAD) ลงกระทำต่อคานต่อเนื่อง A-B-C อยู่ 2 ตัวคือ P และ w

ดังนั้น $LOAD\ ON\ BEAM = P + (w \times L_2)$

$$= 450 + (150 \times 4)$$

$$= 1,050\ Kg \quad \text{ตอบ}$$

แสดงว่า มีน้ำหนัก (LOAD) ทำลงคาน เท่ากับ $1,050\ Kg$ ดังนั้น แรงปฏิกิริยาที่เสา $RA + RB + RC$ ต้องเท่ากับ $1,050\ Kg$ พอดี

2.2 หาแรงปฏิกิริยาเสา RA (ความรู้เดิม ที่ต้องรู้เรื่อง แรงโมเมนต์)

การหาแรงปฏิกิริยา (Reaction Force) เราใช้สมการ

$\Sigma M(\text{รอบจุด}) = 0$ หมายถึง ผลรวมแรงโมเมนต์ (รอบจุดที่กำหนด) มีค่าเท่ากับ $= 0$

แรงโมเมนต์ (M) = แรง (Force) $\times$ ระยะทางตั้งฉาก (ถึงจุดหมุน)

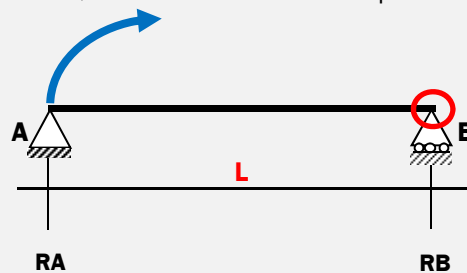
$M = F \times L$ (หน่วยเป็น กก. หรือ Kg)

แรงหรือน้ำหนัก ในการคำนวณ มีอยู่ 2 ชนิด

2.2.1 แรงหรือน้ำหนัก กระทำเป็นจุด (Point Load) ตัวย่อ P

เมื่อทำเป็นแรงโมเมนต์ เท่ากับ $= (P \times L)$

เช่น $\Sigma M(B) = 0$ (ผลรวมแรงโมเมนต์ รอบจุด B = 0)



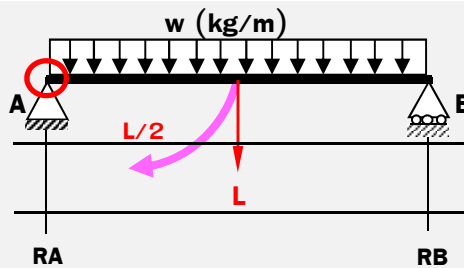
ดังนั้น $แรงโมเมนต์\ RA = (RA \times L)$

ข้อควรจำ : แรง Point Load ใดๆ ถ้าวิ่งผ่านจุดหมุน จะมีค่าเป็น 0 ไม่ต้องมารวมคำนวณในสมการด้วย
กรณีนี้ คือ แรง RB (ไม่นำมารวมคำนวณในสมการด้วย)

2.2.2 แรงหรือน้ำหนัก แผ่เฉลี่ย (Uniform Load) ตัวย่อ w

เมื่อทำเป็นแรงโมเมนต์ เท่ากับ $= (w \times L \times L/2)$

เช่น $\Sigma M(A) = 0$ (ผลรวมแรงโมเมนต์ รอบจุด A = 0)

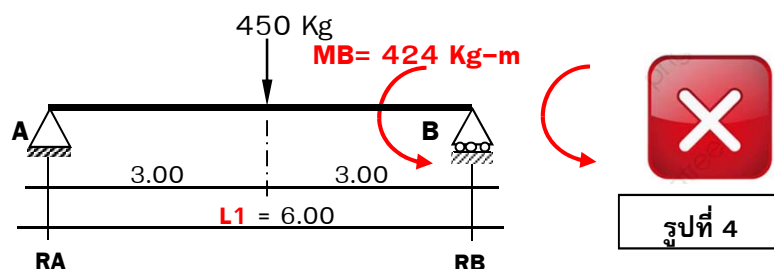


ดังนั้น

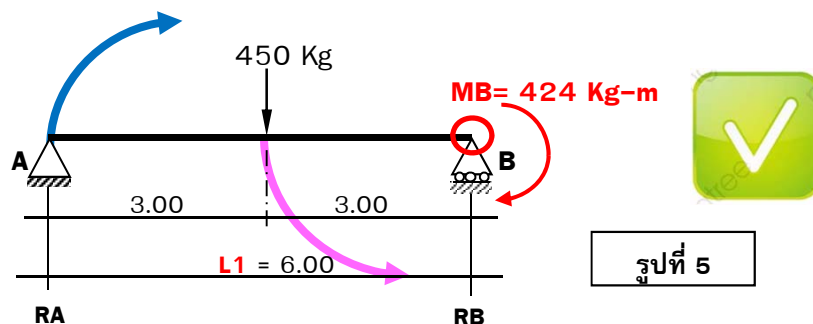
$$\text{แรงโมเมนต์ } w = (w \times L \times L/2)$$

ข้อควรจำ : แรง Point Load ใดๆ ถ้าวิ่งผ่านจุดหมุน จะมีค่าเป็น 0 ไม่ต้องมารวมคำนวณในสมการด้วย
กรณีนี้ คือ แรง RA (ไม่นำมารวมคำนวณในสมการด้วย)

2.2.3 ต้องแยกคาน A-B ออก โดยแยกที่ B เมื่อแยกคานที่ B ต้องนำค่าแรงโมเมนต์ MB มารวมคำนวณด้วย ดังรูปที่ 4



จากรูปที่ 4 ลูกศรแรงโมเมนต์ MB วิ่งผ่าเข้าไปในคาน A-B อย่างนี้ไม่ได้ จะต้องทำการเปลี่ยนทิศทางลูกศรใหม่ ดังรูปที่ 5



ข้อควรจำ : แรง Point Load ใดๆ ถ้าวิ่งผ่านจุดหมุน จะมีค่าเป็น 0 ไม่ต้องมารวมคำนวณในสมการด้วย

แรงโมเมนต์ที่ถูกต้อง ต้องอยู่นอกคานและทิศทางลูกศรวิ่งเข้าหาคานด้วย

2.2.4 ใช้สมการ $\sum MB = 0$, แรงหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็น +

$$(RA \times 6) + 424 - (450 \times 3) = 0$$

(เนื่องจากแรงโมเมนต์ MB เป็นแรงโมเมนต์อยู่แล้วไม่ต้องมีระยะทาง นำแรงมาใช้ได้เลย)

$$6RA + 424 - 1,350 = 0$$

$$6RA = 1,350 - 424$$

$$RA = 926/6$$

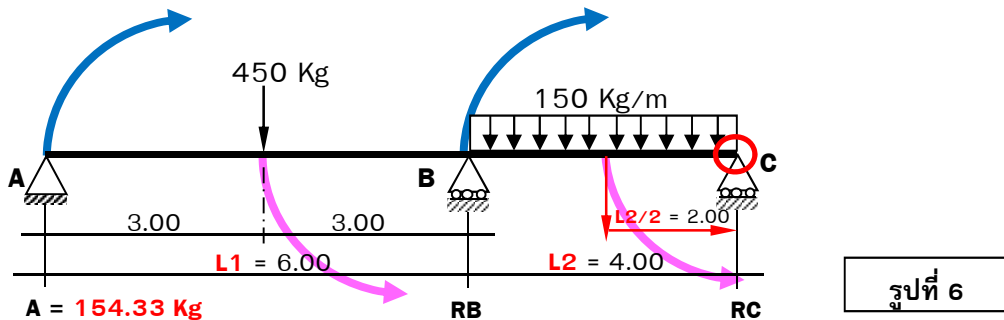
$$RA = 154.33 \text{ Kg}$$

แรงปฏิกิริยา RA ที่หาค่าออกมาได้เท่ากับ 154.33 Kg นั้นเรายังไม่ทราบว่าจะใช่หรือไม่ เพียงแต่คิดว่า ถูกไว้ก่อน เพราะแรงปฏิกิริยา RA ค่ายังไม่เกิน LOAD ON BEAM (ที่ 1,050 Kg)

2.3 หาแรงปฏิกิริยาเสา RB (พิจารณาตอน A-B-C)

จากรูปที่ 3 เราทราบค่าแรงปฏิกิริยา RA แล้ว จะทำการหาค่าแรงปฏิกิริยาที่เสา RB ต่อโดยใช้

2.3.1 ใช้สมการ $\sum MC = 0$,  แรงหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็น + (ดูรูปที่ 6)



จากรูปที่ 6 เรียบอกว่า **พิจารณา** ตอน A-B-C แต่ไม่ได้บอกว่า **แยก** ตอน ดังนั้นเมื่อเรา **ไม่ได้** แยก ตอน ก็ไม่มีความจำเป็นต้องใช้แรงโมเมนต์ **MB** มารวมคำนวณด้วย (แรงโมเมนต์ MB จะนำมาใช้เมื่อมีการแยก ตอน ที่จุด B เท่านั้น)

$\sum MC = 0$,  แรงหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็น +

ข้อควรจำ : แรง Point Load ใดๆ ถ้าวิ่งผ่านจุดหมุน จะมีค่าเป็น 0 ไม่ต้องมารวมคำนวณในสมการด้วย
กรณีนี้ คือ แรง **RC** (ไม่นำมารวมคำนวณในสมการด้วย)

$$(RB \times 4) + (154.33 \times 10) - (150 \times 4 \times 2) - (450 \times 7) = 0$$

$$4RB + 1,543.3 - 1,200 - 3,150 = 0$$

$$4RB = 1,200 + 3,150 - 1,543.3$$

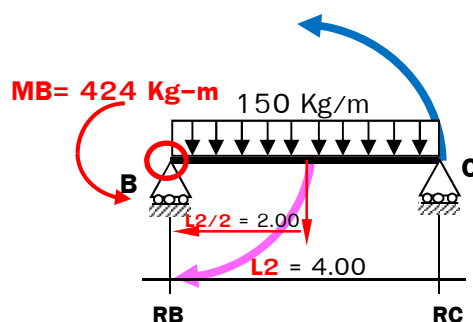
$$RB = 2,806.7/4$$

$$RB = 701.67 \text{ Kg}$$

แรงปฏิกิริยา RB ที่หาค่าออกมาได้เท่ากับ 701.67 Kg นั้นเรายังไม่ทราบว่าใช่หรือไม่ เพียงแต่คิดว่า ถูกไว้ก่อน เพราะแรงปฏิกิริยา RB เมื่อรวมกับแรงปฏิกิริยา RA แล้ว ($RA + RB = 154.33 + 701.67$) ได้ค่าแรงเท่ากับ 856 Kg ค่ายังไม่เกิน LOAD ON BEAM (ที่ 1,050 Kg) แต่ถ้าเกิน 1,050 Kg แสดงว่า **ผิด**

2.4 หาแรงปฏิกิริยาเสา RC

2.4.1 ต้องแยก ตอน B-C ออก โดยแยกที่ B เมื่อแยก ตอน ที่ B ต้องนำค่าแรงโมเมนต์ **MB** มารวมคำนวณด้วย ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7

จากรูปที่ 7 ลูกศรแรงโมเมนต์ **MB** วิ่งหมุนอยู่นอกตอนอยู่แล้ว และวิ่งเข้าหาตอน B-C ด้วย จึงไม่ต้องดำเนินการใดๆ กับลูกศรของแรง ใช้คำนวณได้เลย

2.4.2 ใช้สมการ $\Sigma MB = 0$,  แรงหมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็น +

$$(RC \times 4) + 424 - (150 \times 4 \times 2) = 0$$

(เนื่องจากแรงโมเมนต์ **MB** เป็นแรงโมเมนต์อยู่แล้วไม่ต้องมีระยะทางนำแรงมาใช้ได้เลย)

$$4RC + 424 - 1,200 = 0$$

$$4RC = 1,200 - 424$$

$$RC = 776/4$$

$$RC = 194 \text{ Kg}$$

2.5 ตรวจสอบแรงแนวดิ่ง

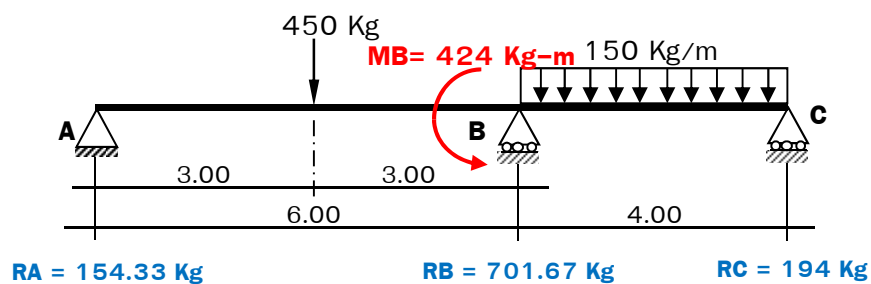
$$\text{LOAD ON BEAM} = \text{REACTION}$$

$$1,050 = RA + RB + RC$$

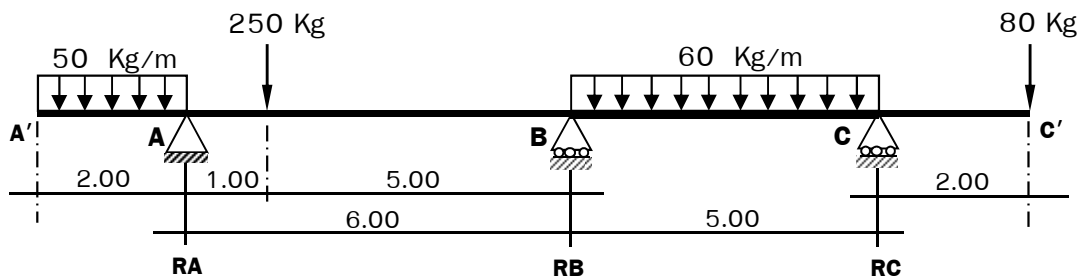
$$1,050 = 154.33 + 701.67 + 194$$

$$1,050 = 1,050 \quad \text{O.K.}$$

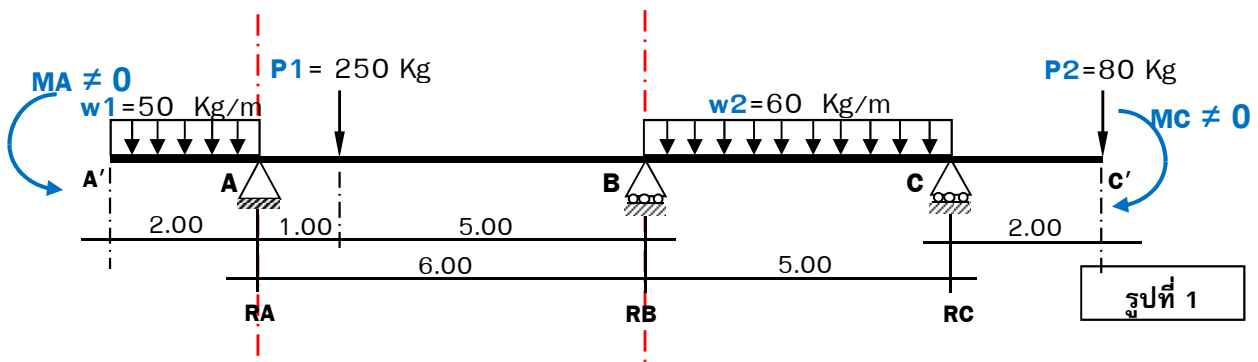
สรุปรูปแรง



ตัวอย่างที่ 1. จงหาแรงโมเมนต์เสากลาง (MB) และแรงปฏิกิริยาที่เสา RA RB และ RC ดังรูปข้างล่างนี้



1. หาแรงโมเมนต์เสากลาง MB



เรารู้อะไรบ้างจากโจทย์

1. เสาริมซ้าย RA มีคานยื่นและมีน้ำหนัก w_1 กระทำที่ปลายคาน 50 Kg/m ดังนั้น แรงโมเมนต์ $MA \neq 0$ Kg-m ต้องหาค่าแรง MA
2. เสาริมขวา RC มีคานยื่นและมีน้ำหนัก P_2 กระทำที่ปลายคาน 80 Kg ดังนั้น แรงโมเมนต์ $MC \neq 0$ Kg-m ต้องหาค่าแรง MC
3. คานด้านซ้าย A-B ความยาว $L_1 = 6.00$ ม.
4. คานด้านขวา B-C ความยาว $L_2 = 5.00$ ม.
5. LOAD คานด้านซ้าย A-B เป็นแบบ Point Load (P_2) ลงไม่กึ่งกลางคาน
6. LOAD คานด้านขวา B-C เป็นแบบ Uniform Load (w) ลงเต็มคาน

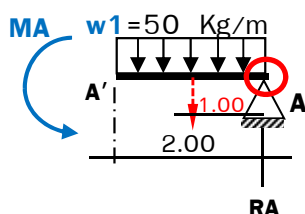
หาแรงโมเมนต์เสาริมซ้าย MA

เนื่องจากมีคานยื่นที่เสาริมซ้าย RA ออกไปอีก 2.00 ม. และมีแรง w_1 กระทำที่ปลายคาน ดังนั้น แรงโมเมนต์ $MA \neq 0$ Kg-m ต้องหาค่าแรง MA

โดยใช้สมการ

$$\sum M(\text{รอบจุด}) = 0$$

ดังรูปข้างล่าง



$$\sum MA = 0 \quad MA = -w_1 \times L \times L/2$$

$$= -50 \times 2 \times 1$$

$$MA = -100 \text{ Kg-m}$$

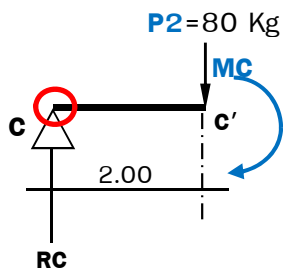
หาแรงโมเมนต์เสาริมซ้าย MC

เนื่องจากมีคานยี่นที่เสาริมขวา RC ออกไปอีก 2.00 ม. และมีแรง P2 กระทำที่ปลายคาน ดังนั้น แรงโมเมนต์ MC $\neq 0$ Kg-m ต้องหาค่าแรง MC

โดยใช้สมการ

$$\sum M(\text{รอบจุด}) = 0$$

ดังรูปข้างล่าง



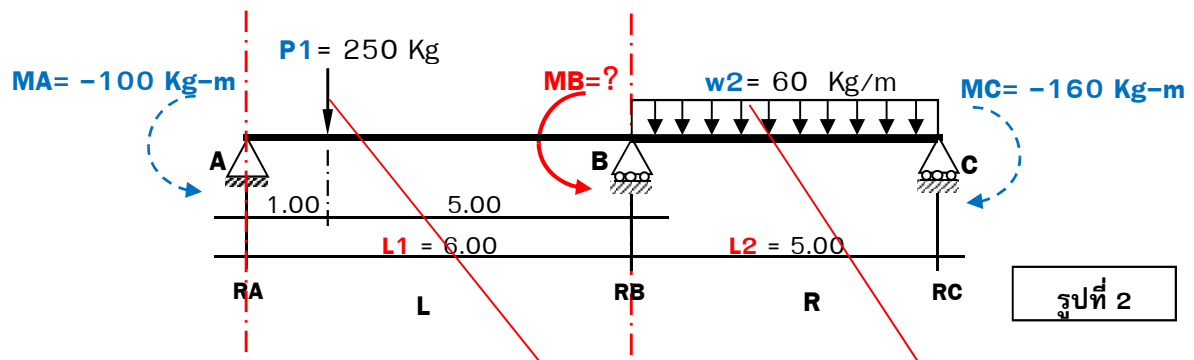
$$\sum MC = 0$$

$$MC = -P_2 \times L$$

$$= -80 \times 2$$

$$MC = -160 \text{ Kg-m}$$

ข้อควรจำ : แรงโมเมนต์คานยี่นเสาริม ทั้งซ้าย และขวา ค่าที่ได้ต้องเป็นค่า ติดลบ (-)



จากสมการ Three Moment

$$MA L_1 + 2 MB (L_1 + L_2) + MC L_2 =$$

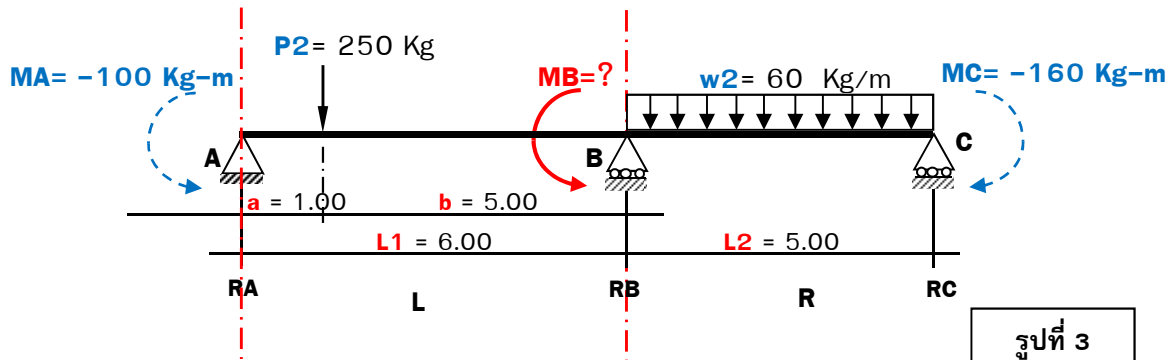
$$-\frac{P a}{L_1} (L_1^2 -$$

$$-\frac{W L^3}{4}$$

LEFT SPAN คานด้านซ้าย	ลักษณะของน้ำหนักบรรทุก	RIGHT SPAN คานด้านขวา
$-\frac{Pa}{L} (L^2 - a^2)$	 น้ำหนักชนิด Point Load กระทำไม่กึ่งกลางคาน	$-\frac{Pb}{L} (L^2 - b^2)$
$-\frac{WL^3}{4}$	 น้ำหนักชนิด Uniform Load กระทำเต็มคาน	$-\frac{WL^3}{4}$

จะได้

$$MA L_1 + 2 MB (L_1 + L_2) + MC L_2 = - \frac{P a}{L_1} (L_1^2 - a^2) - \frac{W L^3}{4}$$



$$MA L_1 + 2 MB (L_1 + L_2) + MC L_2 = - \frac{P_2 a}{L_1} (L_1^2 - a^2) - \frac{W L^3}{4}$$

แทนค่าสูตร

$$(-100 \times 6) + 2 MB (6 + 5) + (-160 \times 5) = - \frac{(250 \times 1) \times (6^2 - 1^2)}{6} - \frac{(60 \times 5^3)}{4}$$

$$- 600 + 2 MB (11) - 800 = - \frac{(250) \times (36 - 1)}{6} - \frac{(60 \times 125)}{4}$$

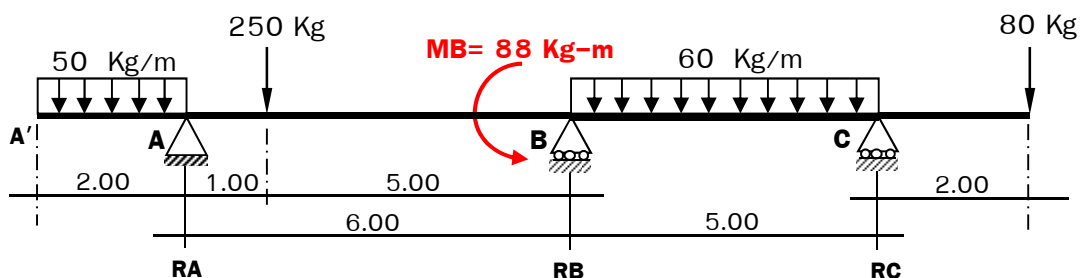
$$- 1,400 + 22 MB = - \frac{(250 \times 35)}{6} - 1,875$$

$$22 MB = -1,458.33 - 1,875 + 1,400$$

$$MB = -1,933.33/22$$

$$MB = -87.879$$

$$MB > -88 \text{ Kg-m} \quad \text{ตอบ}$$



2. หาแรงปฏิกิริยาที่เสา

จากรูปที่ 4 เราทราบค่าแรงโมเมนต์เสากลาง MB แล้วเท่ากับ 88 Kg-m

ในการหาแรงปฏิกิริยาที่เสา ค่าแรงโมเมนต์เสากลาง MB จะเป็นตัวเชื่อมในการหาค่าแรงปฏิกิริยา เมื่อมีการแยกคานในการหาค่าแรง

2.1 หาน้ำหนัก (LOAD) ลงคานต่อเนื่อง

จากรูปที่ 4 มีน้ำหนัก (LOAD) ลงกระทำต่อคานต่อเนื่อง A'-A-B-C-C' อยู่ 3 ตัวคือ

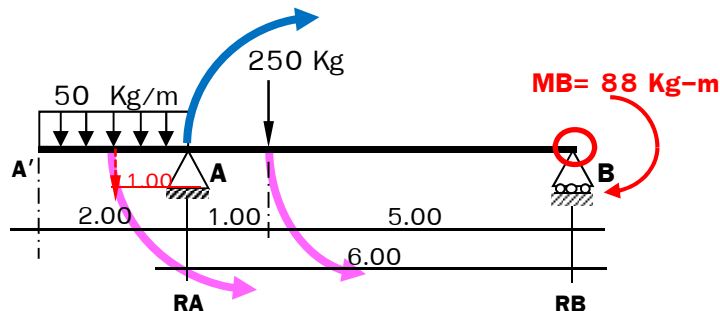
w_1, P_1, w_2 และ P_2

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น LOAD ON BEAM} &= (w_1 \times L) + P_1 + (w_2 \times L) + P_2 \\ &= (50 \times 2) + 250 + (60 \times 5) + 80 \\ &= 730 \text{ Kg} \quad \text{ตอบ}\end{aligned}$$

แสดงว่า มีน้ำหนัก (LOAD) ทำลงคาน เท่ากับ 730 Kg ดังนั้น แรงปฏิกิริยาที่เสา **RA + RB + RC** ต้องเท่ากับ 730 Kg พอดี

2.2 หาแรงปฏิกิริยา RA

2.2.1 ต้องแยกคาน A-B ออก และนำคานยื่นและน้ำหนักที่ปลายคานมารวมคำนวณด้วย โดยแยกที่ B เมื่อแยกคานที่ B ต้องนำค่าแรงโมเมนต์ MB มารวมคำนวณด้วย ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5

ข้อควรจำ : แรง Point Load ใดๆ ถ้าวิ่งผ่านจุดหมุน จะมีค่าเป็น 0 ไม่ต้องมารวมคำนวณในสมการด้วย
แรงโมเมนต์ที่ถูกต้อง ต้องอยู่นอกคานและทิศทางลูกศรวิ่งเข้าหาคานด้วย

2.2.2 ใช้สมการ $\sum MB = 0$,  แรงหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็น +

$$(RA \times 6) + 88 - (250 \times 5) - (50 \times 2 \times 7) = 0$$

$$6RA + 88 - 1,250 - 700 = 0$$

$$6RA = 1,250 + 700 - 88$$

$$RA = 1,862/6$$

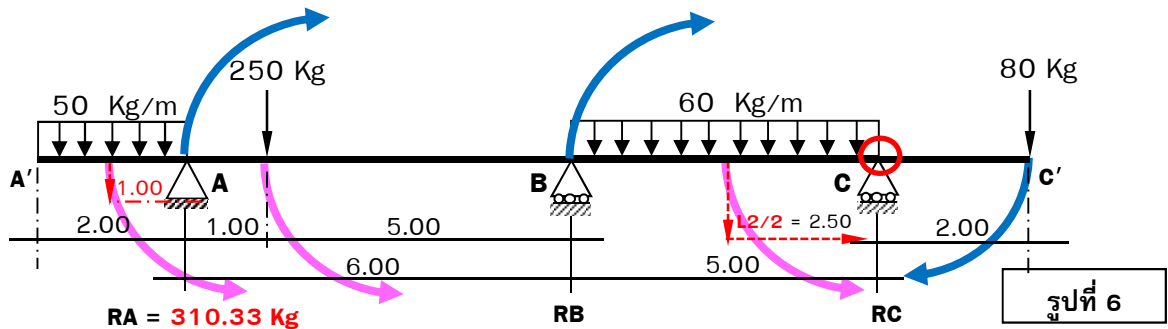
$$RA = 310.33 \text{ Kg}$$

แรงปฏิกิริยา RA ที่หาค่าออกมาได้เท่ากับ 310.33 Kg นั้นเรายังไม่ทราบว่าจะใช่หรือไม่ เพียงแต่คิดว่า ถูกไว้ก่อน เพราะแรงปฏิกิริยา RA ค่ายังไม่เกิน LOAD ON BEAM (ที่ 730 Kg)

2.3 หาแรงปฏิกิริยาเสา RB (พิจารณาตอน A'-A-B-C)

จากรูปที่ 4 เราทราบค่าแรงปฏิกิริยา RA แล้ว จะทำการหาค่าแรงปฏิกิริยาที่เสา RB ต่อโดยใช้

2.3.1 ใช้สมการ $\sum MC = 0$, แรงหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็น + (ดูรูปที่ 6)



จากรูปที่ 6 เรารู้ว่า **พิจารณา** ตอน A'-A-B-C-C' แต่ไม่ได้บอกว่า **แยก** ตอน ดังนั้นเมื่อเรา **ไม่ได้** แยก ตอน ก็ไม่มีความจำเป็นต้องใช้แรงโมเมนต์ MB มารวมคำนวณด้วย (แรงโมเมนต์ MB จะนำมาใช้เมื่อมีการแยก ตอน ที่จุด B เท่านั้น)

$\sum MC = 0$, แรงหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็น +

ข้อควรจำ : แรง Point Load ใดๆ ถ้าวิ่งผ่านจุดหมุน จะมีค่าเป็น 0 ไม่ต้องมารวมคำนวณในสมการด้วย
กรณีนี้ คือ แรง **RC** (ไม่นำมารวมคำนวณในสมการด้วย)

$$(RB \times 5) + (310.33 \times 11) + (80 \times 2) - (60 \times 5 \times 2.5) - (250 \times 10) - (50 \times 2 \times 12) = 0$$

$$5RB - 750 - 2,500 - 1,200 + 3,413.63 + 160 = 0$$

$$5RB = 750 + 2,500 + 1,200 - 3,413.63 - 160$$

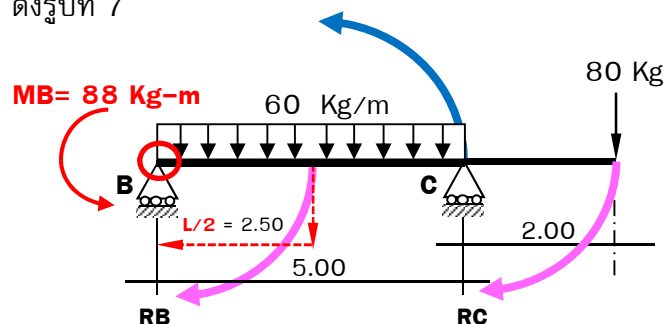
$$RB = 876.37/5$$

$$RB = 175.27 \text{ Kg}$$

แรงปฏิกิริยา RB ที่หาค่าออกมาได้เท่ากับ 175.27 Kg นั้นเรายังไม่ทราบว่าใช่หรือไม่ เพียงแต่คิดว่า ถูกไว้ก่อน เพราะแรงปฏิกิริยา RB เมื่อรวมกับแรงปฏิกิริยา RA แล้ว ($RA + RB = 310.33 + 175.27$) ได้ค่าแรงเท่ากับ 485.6 Kg ค่ายังไม่เกิน LOAD ON BEAM (ที่ 730 Kg)

2.4 หาแรงปฏิกิริยาเสา RC

2.4.1 ต้องแยก ตอน B-C ออก โดยแยกที่ B เมื่อแยก ตอน ที่ B ต้องนำค่าแรงโมเมนต์ MB มารวมคำนวณด้วย ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7

จากรูปที่ 7 ลูกศรแรงโมเมนต์ **MB** รั้งหมุนอยู่นอกคานอยู่แล้ว และรั้งเข้าหาคาน B-C ด้วย จึงไม่ต้องดำเนินการใดๆ กับลูกศรของแรง ใช้คำนวณได้เลย

2.4.2 ใช้สมการ $\sum MB = 0$,  แรงหมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็น +

$$(RC \times 5) + 88 - (60 \times 5 \times 2.5) - (80 \times 7) = 0$$

$$5RC + 88 - 750 - 560 = 0$$

$$5RC = 750 + 560 - 88$$

$$RC = 1,222/5$$

RC = 244.4 Kg

2.5 ตรวจสอบแรงแนวดิ่ง

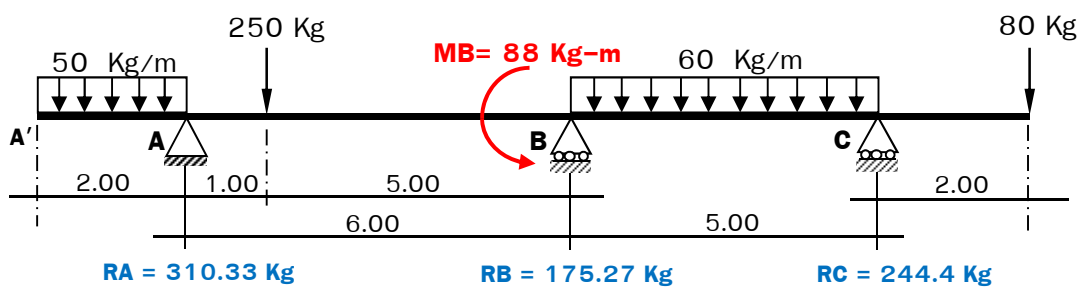
$$\text{LOAD ON BEAM} = \text{REACTION}$$

$$730 = RA + RB + RC$$

$$730 = 310.33 + 175.27 + 244.4$$

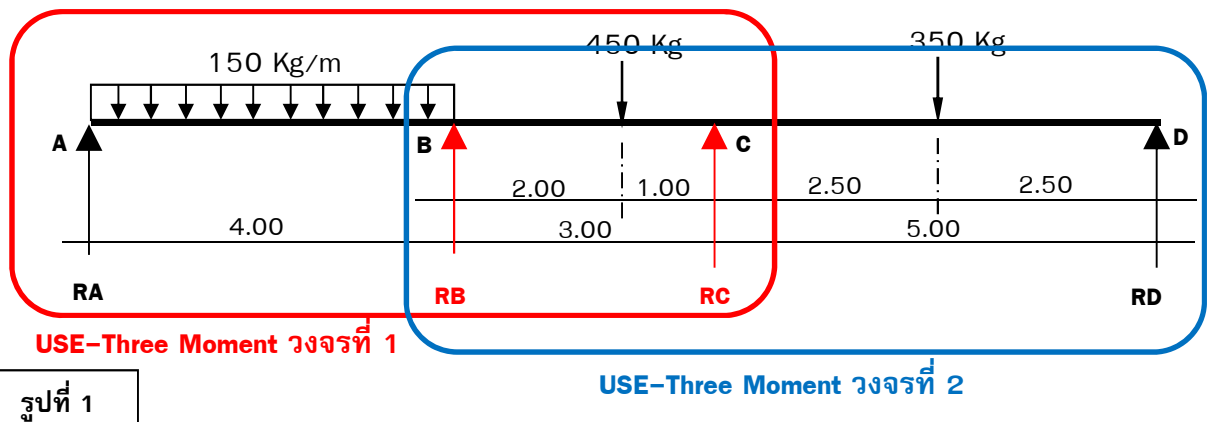
$$730 = 730 \quad \text{O.K.}$$

สรุปรูปแรง



คานต่อเนื่อง (Continuous Beam) แบบ 3 คาน 4 เสา

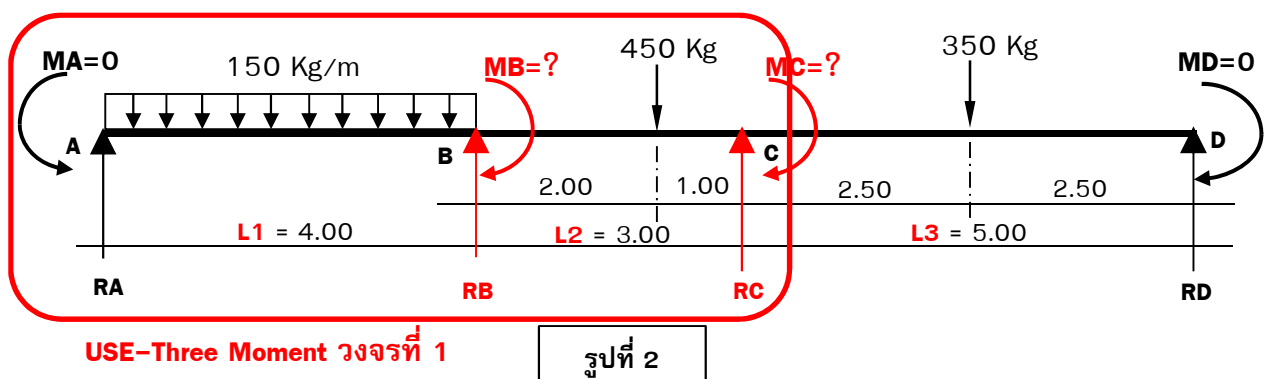
- ตัวอย่าง 1
1. จงหาแรงโมเมนต์เสากลาง (MB) และ (MC)
 2. แรงปฏิกิริยาที่เสา RA RB RC และ RD ดังรูปข้างล่างนี้



ปกติเราจะใช้สูตรสมการ Three Moment Equation กับคานต่อเนื่อง แบบ 2 คาน 3 เสา แต่เมื่อมีคานและเสา เพิ่มเป็น 3 คาน 4 เสา ดังรูปที่ 1

เราจะมองคานต่อเนื่องออกเป็น 2 ช่วง คือ

1. ช่วงที่ 1 คือช่วงคาน A-B-C แล้วใช้สูตรสมการ Three Moment วงจรที่ 1
2. ช่วงที่ 2 คือช่วงคาน B-C-D แล้วใช้สูตรสมการ Three Moment วงจรที่ 2



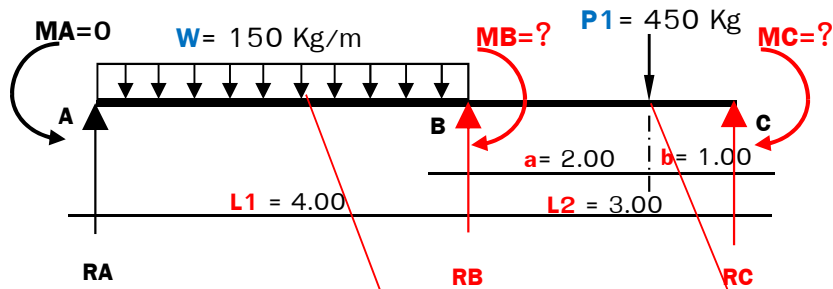
จากรูปที่ 2 เราจะเรียกเสา และคานดังนี้

1. เสา RA เรียก เสาริมซ้าย กรณีไม่มีคานยื่น ค่าแรงโมเมนต์ $MA = 0$ แต่ถ้ามีคานยื่นสามารถหาแรงโมเมนต์ โดยใช้สมการ $\sum MA = 0$
2. เสา RB และ RC เรียก เสากลาง ไม่ทราบค่าแรงโมเมนต์ MB และ MC จะต้องใช้สมการ Three Moment Equation เท่านั้นในการหาค่า
3. เสา RD เรียก เสาริมขวา กรณีไม่มีคานยื่น ค่าแรงโมเมนต์ $MD = 0$ แต่ถ้ามีคานยื่นสามารถหาแรงโมเมนต์ โดยใช้สมการ $\sum MD = 0$
4. คาน A-B ให้เป็น L1 ความยาว 4.00 ม.
5. คาน B-C ให้เป็น L2 ความยาว 3.00 ม.
6. คาน C-D ให้เป็น L3 ความยาว 5.00 ม.

ลำดับขั้นตอนในการหาค่าแรงโมเมนต์เสากลาง คานต่อเนื่อง 3 คาน 4 เสา

1. พิจารณาช่วงคาน A-B-C

(ดูรูปที่ 3 ประกอบ)



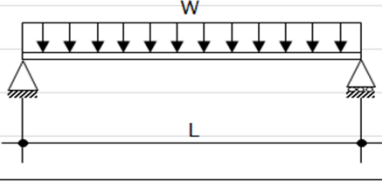
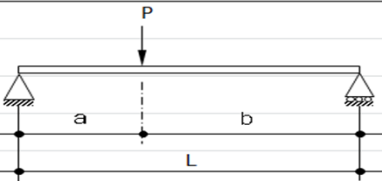
รูปที่ 3

เรารู้อะไรบ้างจาก รูปที่ 3

1. เสาริมซ้าย RA (เป็นเสาริมจริง) ไม่มีคานยื่น ดังนั้น แรงโมเมนต์ $MA = 0 \text{ Kg-m}$
2. เสากลาง RB เนื่องจากเป็นเสากลาง จึงยังไม่ทราบค่าแรงโมเมนต์ **MB** จำเป็นต้องหาค่าแรง
3. เสาริมขวา RC ถ้าดูตามรูปที่ 3 เหมือนเป็นเสาริม แต่ที่จริงไม่ใช่เสาริม **RC คือเสากลาง** ต้นหนึ่ง จึงยังไม่ทราบค่าแรงโมเมนต์ **MC** จำเป็นต้องหาค่าแรง
4. คานด้านซ้าย A-B ความยาว $L1 = 4.00 \text{ ม.}$
5. คานด้านขวา B-C ความยาว $L2 = 3.00 \text{ ม.}$
6. LOAD คานด้านซ้ายเป็นแบบ Uniform Load (w) ลงเต็มคาน
7. LOAD คานด้านขวาเป็นแบบ Point Load ($P1$) ลงไม่กึ่งกลางคาน

จากสมการ Three Moment

$$MA L1 + 2 MB (L1 + L2) + MC L2 = - \frac{WL1^3}{4} - \frac{P1b}{L2} (L2^2 - \dots)$$

LEFT SPAN คานด้านซ้าย	ลักษณะของน้ำหนักบรรทุก	RIGHT SPAN คานด้านขวา
$-\frac{WL^3}{4}$		$-\frac{WL^3}{4}$
	น้ำหนักชนิด Uniform Load กระทำเต็มคาน	
$-\frac{Pa}{L} (L^2 - a^2)$		$-\frac{Pb}{L} (L^2 - b^2)$
	น้ำหนักชนิด Point Load กระทำไม่กึ่งกลางคาน	

จะได้

$$MAL1 + 2 MB (L1 + L2) + MCL2 = - \frac{WL1^3}{4} - \frac{P1b}{L2} (L2^2 - b^2)$$

แทนค่าสูตร

$$(0 \times 4) + 2 MB (4 + 3) + (MC \times 3) = - \frac{(150 \times 4^3)}{4} - \frac{(450 \times 1) \times (3^2 - 1^2)}{3}$$

$$0 + 2 MB (7) + 3 MC = - \frac{(150 \times 64)}{4} - \frac{450 \times (9 - 1)}{3}$$

$$14 MB + 3 MC = -2,400 - 1,200$$

$$14 MB + 3 MC = -3,600 \quad \text{.....สมการ SELECT}$$

เมื่อแทนค่าสูตร จนมาถึงขั้นตอนนี้ ให้นักศึกษาเลือกว่า จะให้ค่าใดค่าหนึ่ง คือ MB หรือ MC อยู่สมการด้านซ้ายมือ สมมติในที่นี้ ให้ ค่า **MB** อยู่ทางด้านซ้ายมือ

จะได้

$$14 MB = -3,600 - 3 MC$$

$$MB = \frac{-3,600 - 3 MC}{14}$$

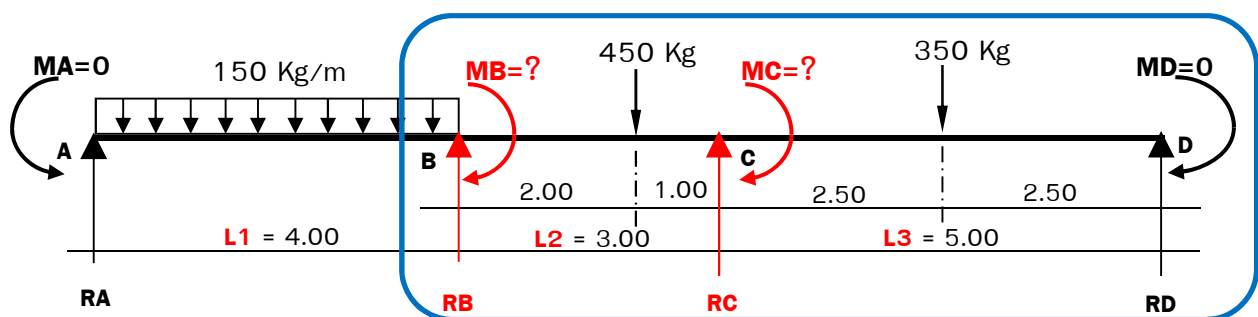
กรณีใช้ค่า MB

$$MB = -257.143 - 0.214 MC \quad \text{.....(1)}$$

(จบขบวนการ **USE Three Moment วงจรที่ 1**)

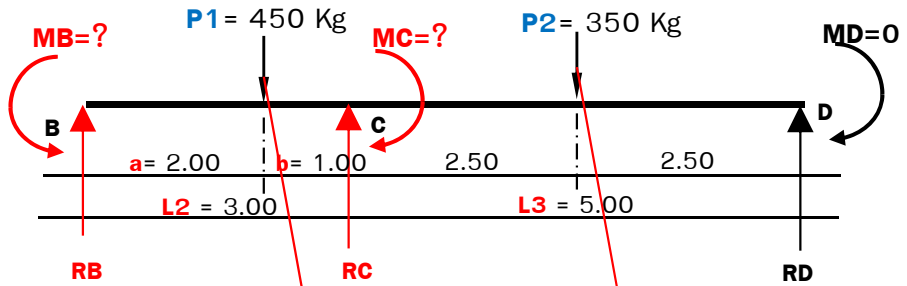
2. พิจารณาช่วงคาน B-C-D

(ดูรูปที่ 4 ประกอบ)



USE-Three Moment วงจรที่ 2

รูปที่ 4



เรารู้อะไรบ้างจาก รูปที่ 4

1. เสาริมซ้าย RB ถ้าดูตามรูปที่ 4 เหมือนเป็นเสาริม แต่ที่จริงไม่ใช่เสาริม **RB คือเสากลาง** ต้นหนึ่งจึงยังไม่ทราบค่าแรงโมเมนต์ MB จำเป็นต้องหาค่าแรง
2. เสากลาง RC เนื่องจากเป็นเสากลาง จึงยังไม่ทราบค่าแรงโมเมนต์ **MC** จำเป็นต้องหาค่าแรง
3. เสาริมขวา RD (เป็นเสาริมจริง) ไม่มีคานยื่น ดังนั้น แรงโมเมนต์ MD = 0 Kg-m
4. คานด้านซ้าย B-C ความยาว L2 = 3.00 ม.
5. คานด้านขวา C-D ความยาว L3 = 5.00 ม.
6. LOAD คานด้านซ้ายเป็นแบบ Point Load (P1) ลงไม่กึ่งกลางคาน
7. LOAD คานด้านขวาเป็นแบบ Point Load (P2) ลงกึ่งกลางคาน

จากสมการ Three Moment

$$MBL_2 + 2 MC (L_2 + L_3) + MDL_3 = - \frac{P_1 a}{L_2} (L_2^2 - a^2) - \frac{3P_2 L_3^2}{8}$$

LEFT SPAN คานด้านซ้าย	ลักษณะของน้ำหนักบรรทุก	RIGHT SPAN คานด้านขวา
$-\frac{Pa}{L} (L^2 - a^2)$		$-\frac{Pb}{L} (L^2 - b^2)$
	น้ำหนักชนิด Point Load กระทำไม่กึ่งกลางคาน	
$-\frac{3PL^2}{8}$		$-\frac{3PL^2}{8}$
	น้ำหนักชนิด Point Load กระทำกึ่งกลางคาน	

จะได้

$$MBL_2 + 2 MC (L_2 + L_3) + MDL_3 = - \frac{P_1 a}{L_2} (L_2^2 - a^2) - \frac{3P_2 L_3^2}{8}$$

$$(MB \times 3) + 2 MC (3 + 5) + (0 \times 5) = - \frac{(450 \times 2) \times (3^2 - 2^2)}{3} - \frac{3 \times 350 \times 5^2}{8}$$

$$3 \text{ MB} + 2 \text{ MC} (8) + 0 = - \frac{900 \times (9 - 4)}{3} - \frac{3 \times 350 \times 25}{8}$$

$$3 \text{ MB} + 16 \text{ MC} = -1,500 - 3,281.25$$

$$3 \text{ MB} + 16 \text{ MC} = -4,781.25 \dots\dots\dots(2)$$

สำหรับ สมการที่ 2 นี้ เราไม่ต้อง เลือกค่าแรงโมเมนต์ MB และ MC ให้คงไว้ดังเดิม
(จบขบวนการ *USE Three Moment วงจรที่ 2*)

สรุปสมการที่หาได้

$$\text{MB} = -257.143 - 0.214 \text{ MC} \dots\dots\dots(1)$$

$$3 \text{ MB} + 16 \text{ MC} = -4,781.25 \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{MB} = -257.143 - 0.214 \text{ MC} \dots\dots\dots(1)$$

สมการที่ (1) หมายถึง ค่าแรงโมเมนต์ MB มีค่าเท่ากับ $-257.143 - 0.214 \text{ MC}$

$$3 \text{ MB} + 16 \text{ MC} = -4,781.25 \dots\dots\dots(2)$$

สมการที่ (2) หมายถึง ค่าแรงโมเมนต์ $3 \text{ MB} + 16 \text{ MC}$ มีค่าเท่ากับ $-4,781.25$

เท่ากับว่า สมการที่ (1) รู้ค่าแรงโมเมนต์ MB เต็มตัวแล้ว แต่ยังติดรูปค่า MC อยู่
ดังนั้น เราจะใช้ค่าแรงโมเมนต์ MB ซึ่งเท่ากับ $-257.143 - 0.214 \text{ MC}$ แทนค่าลงใน

สมการที่ (2) จะได้ดังนี้

คำสั่ง 1 : แทนค่า MB จากสมการที่ (1) ลงใน สมการที่ (2)

$$3 (-257.143 - 0.214 \text{ MC}) + 16 \text{ MC} = -4,781.25 \dots\dots(2)$$

$$-771.429 - 0.642 \text{ MC} + 16 \text{ MC} = -4,781.25$$

$$-771.429 + 15.358 \text{ MC} = -4,781.25$$

$$15.358 \text{ MC} = -4,781.25 + 771.429$$

$$15.358 \text{ MC} = -4,009.821$$

$$\text{MC} = -4,009.821 / 15.358$$

$$\text{MC} = -261.09 \dots\dots\dots(\text{ใช้คำนวณ})$$

$$\text{MC} > -262 \text{ Kg-m} \quad \text{ตอบ}$$

เมื่อได้ค่าแรงโมเมนต์ MC ออกมาแล้ว ให้นำค่าแรงโมเมนต์ MC ไปหาค่า
แรงโมเมนต์ MB ต่อไป

คำสั่ง 2 : แทนค่า MC ที่หาค่าได้ ลงใน สมการที่ (1)

$$\begin{aligned}\text{สมการที่(1)} \quad \text{MB} &= -257.143 - 0.214 \text{ MC} \dots\dots\dots(1) \\ \text{MB} &= -257.143 - 0.214 (-261.09) \\ \text{MB} &= -257.143 + 55.873 \\ \text{MB} &= -201.27 \dots\dots\dots(\text{ใช้คำนวณ}) \\ \text{MB} &> -202 \text{ Kg-m} \quad \text{ตอบ}\end{aligned}$$

พิสูจน์คำตอบ

ทดลองใช้ค่าแรงโมเมนต์ที่หาได้ ตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบ
โดยใช้ค่าของ สมการที่ (2)

$$\begin{aligned}3 \text{ MB} + 16 \text{ MC} &= -4,781.25 \dots\dots\dots(2) \\ \text{แทนค่าสมการ} \\ 3 (-201.27) + 16 (-261.09) &= -4,781.25 \\ (-603.81) + (-4,177.44) &= -4,781.25 \\ -4,781.25 &= -4,781.25 \quad \text{O.K.}\end{aligned}$$

กรณีใช้ค่า MC

$$\begin{aligned}\text{จาก} \quad 14 \text{ MB} + 3 \text{ MC} &= -3,600 \quad \dots\dots\dots\text{สมการ SELECT} \\ \text{เลือกค่า MC จะได้} \quad 3 \text{ MC} &= -3,600 - 14 \text{ MB} \\ \text{MC} &= \frac{-3,600 - 14 \text{ MB}}{3} \\ \text{MC} &= -1,200 - 4.667 \text{ MB} \dots\dots\dots(1)\end{aligned}$$

คำสั่ง 1 : แทนค่า MC จากสมการที่ (1) ลงใน สมการที่ (2)

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad 3 \text{ MB} + 16 \text{ MC} &= -4,781.25 \dots\dots\dots(2) \\ 3 \text{ MB} + 16(-1,200 - 4.667 \text{ MB}) &= -4,781.25 \\ 3 \text{ MB} - 19,200 - 74.672 \text{ MB} &= -4,781.25 \\ -19,200 - 71.672 \text{ MB} &= -4,781.25 \\ -71.672 \text{ MB} &= -4,781.25 + 19,200 \\ -71.672 \text{ MB} &= 14,418.75 \\ \text{MB} &= 14,418.75 / -71.672 \\ \text{MB} &= -201.177 \dots\dots\dots(\text{ใช้คำนวณ}) \\ \text{MB} &> -202 \text{ Kg-m} \quad \text{ตอบ}\end{aligned}$$

คำสั่ง 2 : แทนค่า MB ที่หาค่าได้ ลงใน สมการที่ (1)

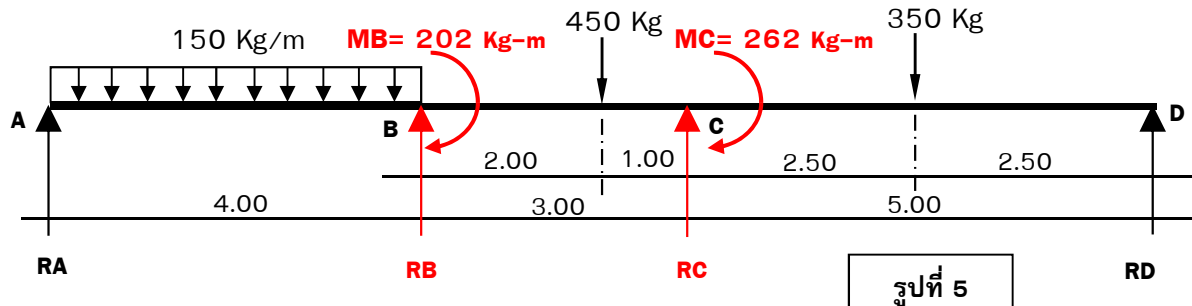
$$\begin{aligned}\text{MC} &= -1,200 - 4.667 \text{ MB} \dots\dots\dots(1) \\ \text{MC} &= -1,200 - 4.667 (-201.177)\end{aligned}$$

$$MC = -1,200 + 938.893$$

$$MC = -261.107$$

$$MC > -262 \text{ Kg-m} \quad \text{ตอบ}$$

3. หาแรงปฏิกิริยาที่เสา

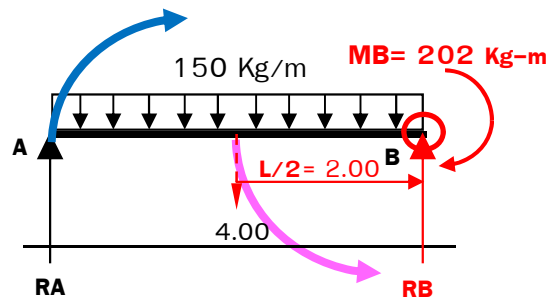


3.1 หาน้ำหนักลงบนคาน (Load On Beam) A-B-C-D

$$\begin{aligned} \text{Load On Beam} &= (150 \times 4) + 450 + 350 \\ &= 1,400 \text{ Kg} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

3.2 หาแรงปฏิกิริยาที่เสา RA

(แยกคาน A-B)



ข้อสังเกต

เราแยกคาน A-B ที่จุด B ดังนั้น

1. นำแรงโมเมนต์ MB เข้ามาร่วมคำนวณในสมการด้วย เนื่องจากแยกคานที่ จุด B

ใช้สมการ $\sum MB = 0$, แรงหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็น +

$$4RA + 202 - (150 \times 4 \times 2) = 0$$

$$4RA + 202 - 1,200 = 0$$

$$4RA = 1,200 - 202$$

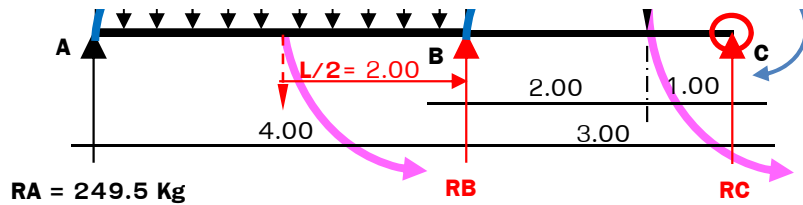
$$RA = 998/4$$

$$RA = 249.5 \text{ Kg}$$

3.3 หาแรงปฏิกิริยาที่เสา RB

(แยกคาน A-B-C)





รูปที่ 7

ข้อสังเกต

เราแยกคาน **A-B-C** โดยจุดแยกคานอยู่ที่ จุด **C** ดังนั้น

1. นำแรงโมเมนต์ **MC** เข้ามาร่วมคำนวณในสมการด้วย เนื่องจากแยกคานที่ จุด **C**
2. เราไม่ได้แยกคานที่จุด **B** ดังนั้น แรงโมเมนต์ **MB** **ไม่นำ**มาร่วมคำนวณในสมการด้วย

ใช้สมการ $\sum MC = 0$, แรงหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็น +

$$3RB + (249.5 \times 7) + 262 - (450 \times 1) - (150 \times 4 \times 5) = 0$$

$$3RB + 1,746.5 + 262 - 450 - 3,000 = 0$$

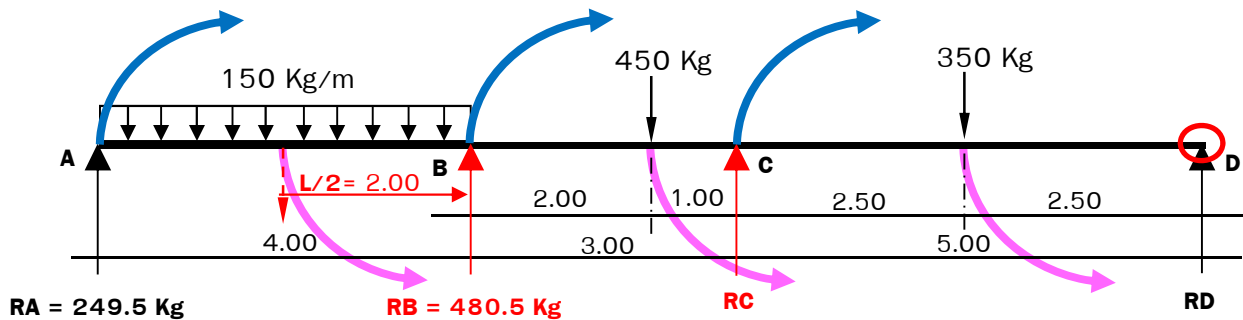
$$3RB = 450 + 3,000 - 1,746.5 - 262$$

$$RB = 1,441.5/3$$

$$RB = 480.5 \text{ Kg}$$

3.4 หาแรงปฏิกิริยาที่เสา RC

(พิจารณาคาน **A-B-C-D**)



ข้อสังเกต

เราพิจารณาคาน **A-B-C-D** เราไม่ได้แยกคาน ใดๆเลย ดังนั้น

1. แรงโมเมนต์ **MB** เรา **ไม่นำ**มาร่วมคำนวณในสมการด้วย
2. แรงโมเมนต์ **MC** เรา **ไม่นำ**มาร่วมคำนวณในสมการด้วย

ใช้สมการ $\sum MD = 0$, แรงหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็น +

$$5RC + (480.5 \times 8) + (249.5 \times 12) - (350 \times 2.5) - (450 \times 6) - (150 \times 4 \times 10) = 0$$

$$5RC + 3,844 + 2,994 - 875 - 2,700 - 6,000 = 0$$

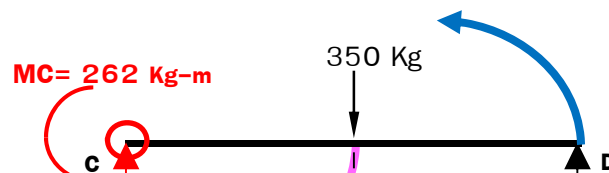
$$5RC = 875 + 2,700 + 6,000 - 3,844 - 2,994$$

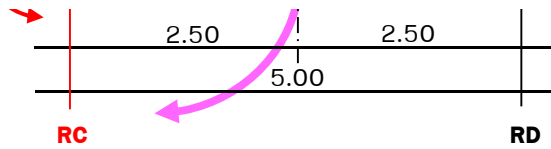
$$RC = 2,737/5$$

$$RC = 547.4 \text{ Kg}$$

3.5 หาแรงปฏิกิริยาที่เสา RD

(แยกคาน **C-D**)





ข้อสังเกต

เราแยกคาน **C-D** ที่จุด **C** ดังนั้น

1. นำแรงโมเมนต์ **MC** เข้ามาร่วมคำนวณในสมการด้วย เนื่องจากแยกคานที่ จุด **C**

ใช้สมการ $\sum MC = 0$,  แรงหมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็น +

$$5RD + 262 - (350 \times 2.5) = 0$$

$$5RD + 262 - 875 = 0$$

$$5RD = 875 - 262$$

$$RD = 613/5$$

$$RD = 122.6 \text{ Kg}$$

4. ตรวจสอบแรงแนวดิ่ง

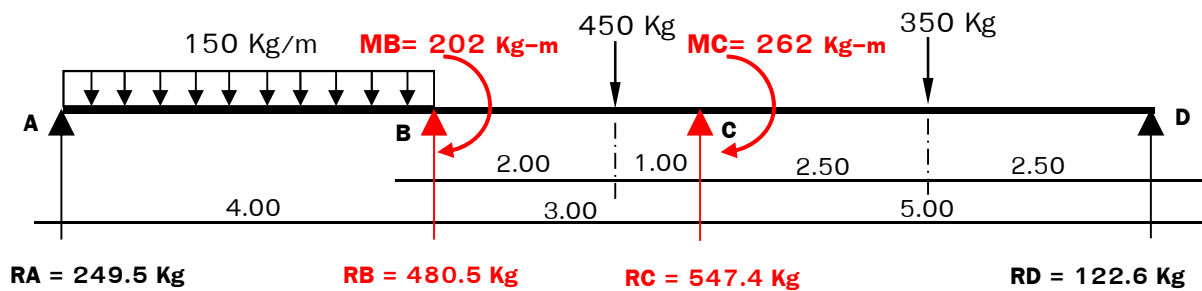
LOAD ON BEAM = REACTION

$$1,400 = RA + RB + RC + RD$$

$$1,400 = 249.5 + 480.5 + 547.4 + 122.6$$

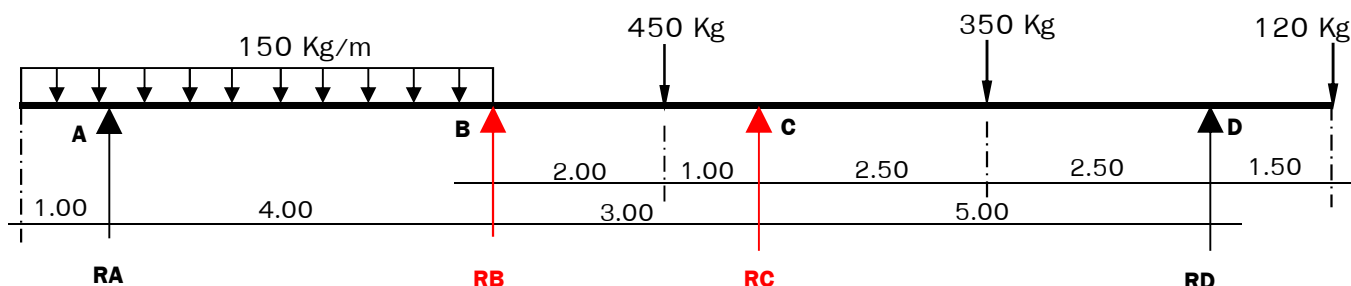
$$1,400 = 1,400 \quad \text{O.K.}$$

สรุปรูปแรง

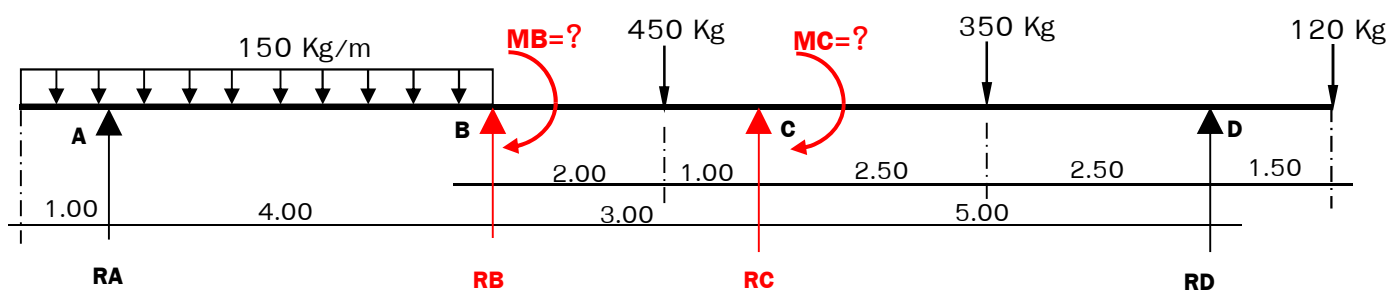


คานต่อเนื่อง (Continuous Beam) แบบ 3 คาน 4 เสา ชนิดมีคานยื่น

- ตัวอย่าง 1
1. จงหาแรงโมเมนต์เสากลาง (MB) และ (MC)
 2. แรงปฏิกิริยาที่เสา RA RB RC และ RD ดังรูปข้างล่างนี้



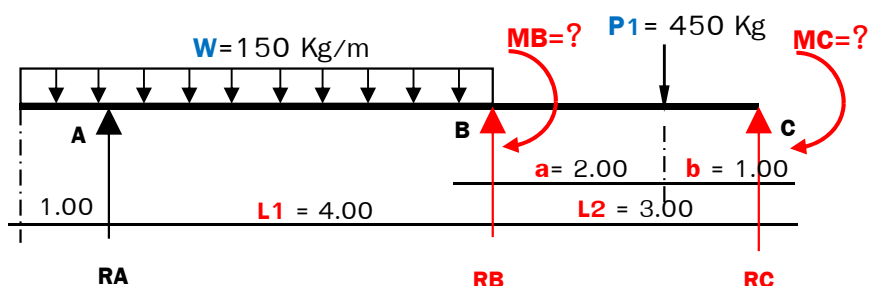
เขียนภาพแรงที่ต้องการหา ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1

ลำดับขั้นตอนในการหาค่าแรงโมเมนต์เสากลาง คานต่อเนื่อง 3 คาน 4 เสาแบบมีคานยื่น

1. พิจารณาช่วงคาน A-B-C (ดูรูปที่ 2 ประกอบ) (USE Three Moment วงจรที่ 1)



รูปที่ 2

หาแรงโมเมนต์ MA

$$\sum MA = 0$$

$$MA = -(150 \times 1 \times 0.5)$$

$$= -75 \text{ Kg-m}$$

ตอบ

หาแรงโมเมนต์ เสากลาง MB และ MC

จะได้

$$MAL_1 + 2 MB (L_1 + L_2) + MCL_2 = -\frac{WL_1^3}{4} - \frac{P_1 b}{L_2} (L_2^2 - b^2)$$

แทนค่าสูตร

$$(-75 \times 4) + 2 \text{ MB } (4 + 3) + (\text{MC} \times 3) = - \frac{150 \times 4^3}{4} - \frac{(450 \times 1) \times (3^2 - 1^2)}{3}$$

$$-300 + 2 \text{ MB } (7) + 3 \text{ MC} = - \frac{150 \times 64}{4} - \frac{450 \times (9 - 1)}{3}$$

$$-300 + 14 \text{ MB} + 3 \text{ MC} = -2,400 - 1,200$$

$$14 \text{ MB} + 3 \text{ MC} = -2,400 - 1,200 + 300$$

$$14 \text{ MB} + 3 \text{ MC} = -3,300 \quad \text{.....สมการ SELECT}$$

เลือก MB

$$14 \text{ MB} = -3,300 - 3 \text{ MC}$$

$$\text{MB} = \frac{-3,300 - 3 \text{ MC}}{14}$$

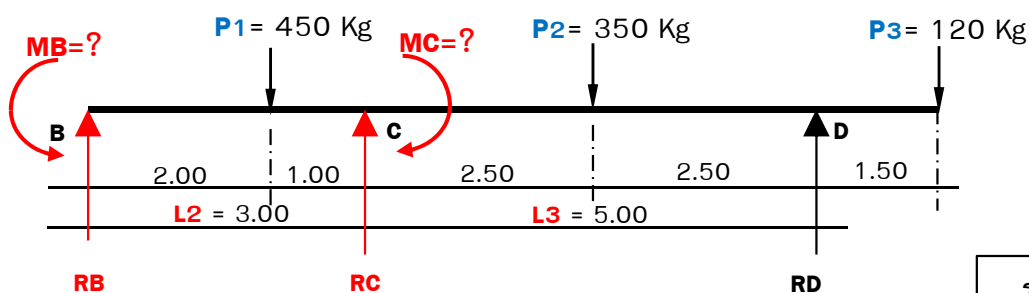
$$\text{MB} = -235.714 - 0.214 \text{ MC} \quad \text{.....(1)}$$

(จบขบวนการ USE Three Moment วงจรที่ 1)

2. พิจารณาช่วงคาน B-C-D

(ดูรูปที่ 3 ประกอบ)

(USE Three Moment วงจรที่ 2)



รูปที่ 3

หาแรงโมเมนต์ MD

$$\sum \text{MD} = 0$$

$$\text{MD} = -(120 \times 1.5)$$

$$= -180 \text{ Kg-m}$$

ตอบ

จะได้

$$\text{MB}L_2 + 2 \text{ MC } (L_2 + L_3) + \text{MD}L_3 = - \frac{P_1 a (L_2^2 - a^2)}{L_2} - \frac{3P_2 L_3^2}{8}$$

$$(\text{MB} \times 3) + 2 \text{ MC } (3 + 5) + (-180 \times 5) = - \frac{(450 \times 2) \times (3^2 - 2^2)}{3} - \frac{3 \times 350 \times 5^2}{8}$$

$$3 \text{ MB} + 2 \text{ MC } (8) + (-900) = - \frac{900 \times (9 - 4)}{3} - \frac{1,050 \times 25}{8}$$

$$3 \text{ MB} + 16 \text{ MC} - 900 = -1,500 - 3,281.25$$

$$3 \text{ MB} + 16 \text{ MC} = -1,500 - 3,281.25 + 900$$

$$3 \text{ MB} + 16 \text{ MC} = -3,881.25 \quad \dots\dots\dots(2)$$

(จบขบวนการ *USE Three Moment* วงจรที่ 2)

สรุปสมการที่หาได้

$$\text{MB} = -235.714 - 0.214 \text{ MC} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$3 \text{ MB} + 16 \text{ MC} = -3,881.25 \quad \dots\dots\dots(2)$$

คำสั่ง 1 : แทนค่า MB จากสมการที่ (1) ลงใน สมการที่ (2)

$$3 (-235.714 - 0.214 \text{ MC}) + 16 \text{ MC} = -3,881.25 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$-707.142 - 0.642 \text{ MC} + 16 \text{ MC} = -3,881.25$$

$$-707.142 + 15.358 \text{ MC} = -3,881.25$$

$$15.358 \text{ MC} = -3,881.25 + 707.142$$

$$15.358 \text{ MC} = -3,174.108$$

$$\text{MC} = -3,174.108 / 15.358$$

$$\text{MC} = -206.675 \quad \dots\dots\dots(\text{ใช้คำนวณ})$$

$$\text{MC} > -207 \text{ Kg-m} \quad \text{ตอบ}$$

คำสั่ง 2 : แทนค่า MC ที่หาค่าได้ ลงใน สมการที่ (1)

$$\text{สมการที่(1)} \quad \text{MB} = -235.714 - 0.214 \text{ MC} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{MB} = -235.714 - 0.214(-206.675)$$

$$\text{MB} = -235.714 + 44.228$$

$$\text{MB} = -191.486 \quad \dots\dots\dots(\text{ใช้คำนวณ})$$

$$\text{MB} > -192 \text{ Kg-m} \quad \text{ตอบ}$$

พิสูจน์คำตอบ

$$\text{ใช้สมการที่ 2} \quad 3 \text{ MB} + 16 \text{ MC} = -3,881.25 \quad \dots\dots\dots(2)$$

แทนค่าสมการ

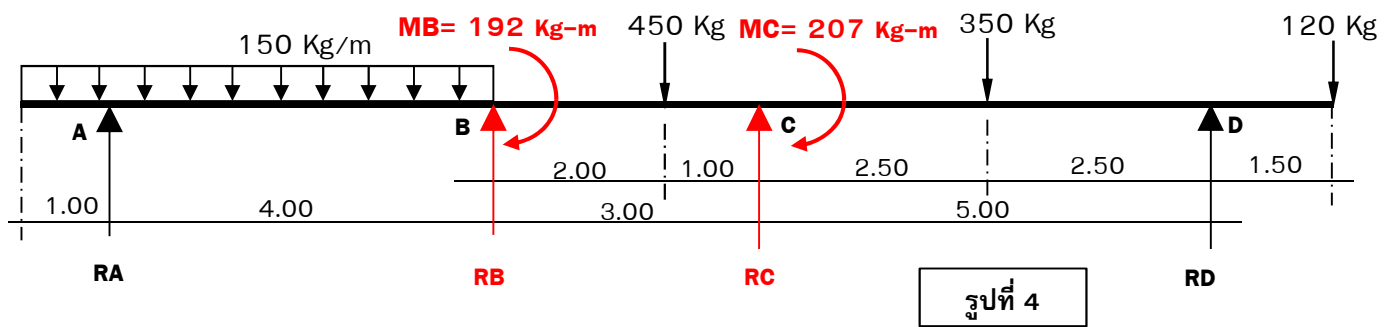
$$3 (-191.486) + 16 (-206.675) = -3,881.25$$

$$(-574.458) + (-3,306.8) = -3,881.25$$

$$-3,881.25 = -3,881.25$$

O.K.

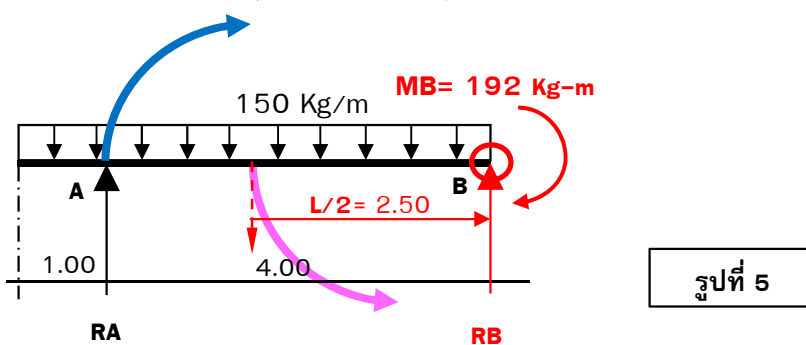
3. หาแรงปฏิกิริยาที่เสา



3.1 หาน้ำหนักลงบนคาน (Load On Beam) A-B-C-D

$$\begin{aligned}\text{Load On Beam} &= (150 \times 5) + 450 + 350 + 120 \\ &= 1,670 \text{ Kg} \quad \text{ตอบ}\end{aligned}$$

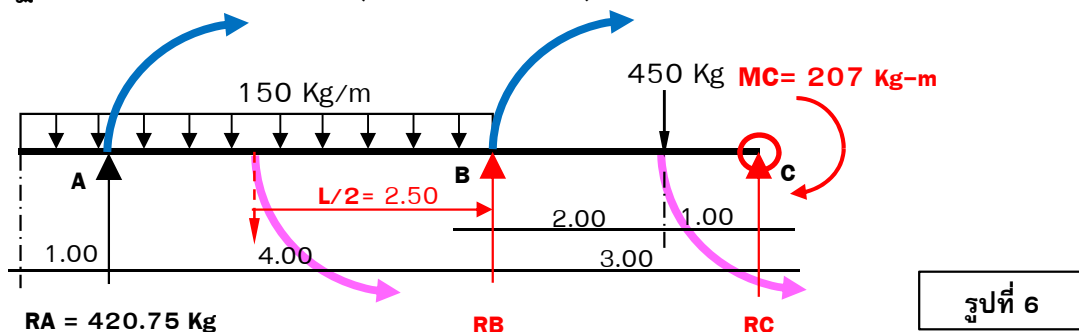
3.2 หาแรงปฏิกิริยาที่เสา RA (แยกคาน A-B)



ใช้สมการ $\sum M_B = 0$, $\curvearrowright +$

$$\begin{aligned}4RA + 192 - (150 \times 5 \times 2.5) &= 0 \\ 4RA + 192 - 1,875 &= 0 \\ 4RA &= 1,875 - 192 \\ RA &= 1,683/4 \\ \mathbf{RA} &= \mathbf{420.75 \text{ Kg}}\end{aligned}$$

3.3 หาแรงปฏิกิริยาที่เสา RB (แยกคาน A-B-C)



ใช้สมการ

$$\sum M_C = 0, \quad \curvearrowright +$$

$$3R_B + (420.75 \times 7) + 207 - (450 \times 1) - (150 \times 5 \times 5.5) = 0$$

$$3R_B + 2,945.25 + 207 - 450 - 4,125 = 0$$

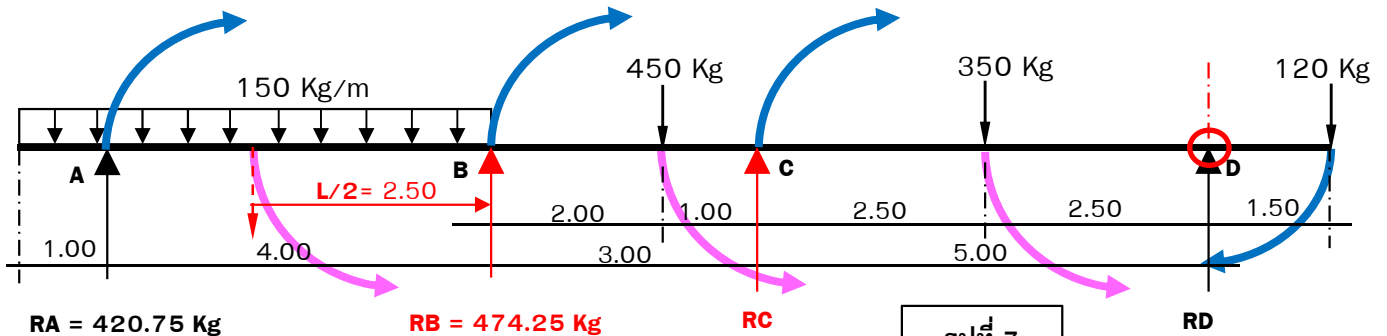
$$3R_B = 450 + 4,125 - 2,945.25 - 207$$

$$R_B = 1,422.75/3$$

$$R_B = 474.25 \text{ Kg}$$

3.4 หาแรงปฏิกิริยาที่เสา RC

(พิจารณาตอน A-B-C-D)



$$R_A = 420.75 \text{ Kg}$$

$$R_B = 474.25 \text{ Kg}$$

$$R_C$$

$$R_D$$

ใช้สมการ

$$\sum M_D = 0, \quad \curvearrowright +$$

$$5R_C + (474.25 \times 8) + (420.75 \times 12) + (120 \times 1.5) - (350 \times 2.5) - (450 \times 6) - (150 \times 5 \times 10.5) = 0$$

$$5R_C + 7,701.75 + 4,095 - 1,875 - 4,500 - 8,800 = 0$$

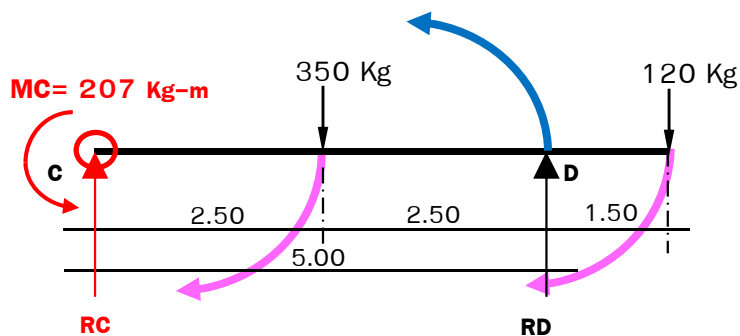
$$5R_C = 875 + 2,700 + 7,875 - 3,794 - 5,049 - 180$$

$$R_C = 2,427/5$$

$$R_C = 485.4 \text{ Kg}$$

3.5 หาแรงปฏิกิริยาที่เสา RD

(แยกตอน C-D)



ใช้สมการ

$$\sum M_C = 0, \quad \curvearrowright +$$

$$5R_D + 207 - (350 \times 2.5) - (120 \times 6.5) = 0$$

$$5R_D + 207 - 875 - 780 = 0$$

$$5R_D = 875 + 780 - 207$$

$$R_D = 1,448/5$$

$$R_D = 289.6 \text{ Kg}$$

4. ตรวจสอบแรงแนวตั้ง

LOAD ON BEAM = REACTION

$$1,670 = RA + RB + RC + RD$$

$$1,670 = 420.75 + 474.25 + 485.4 + 289.6$$

$$1,670 = 1,670 \quad \text{O.K.}$$

สรุปรูปแรง

