การโก่งตัวของคาน (Deflections of Beam Method)

6.1 บทนำ

การศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีโครงสร้าง หรือการวิเคราะห์โครงสร้าง นอกจากจะวิเคราะห์เพื่อทราบค่าแรงหรือน้ำหนักบรรทุกที่กระทำต่อองค์อาคาร ซึ่งมีผลทำให้เกิดหน่วยแรงตามแนวแกน (หน่วยแรงดึงหรือหน่วย แรงอัด) หน่วยแรงเฉือน และหน่วยแรงดัด (หน่วยแรงดึงและหน่วยแรงอัด) แล้ว ยังมีการวิเคราะห์เพื่อทราบ พฤติกรรมที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งของโครงสร้าง คือ การวิเคราะห์การโก่งตัวของโครงสร้าง อันได้แก่ การวิเคราะห์ หาค่าความลาดเอียงหรือมุมลาดเอียง (slope) การเปลี่ยนแปลงของมุม (angle change or change of slope) ระยะโก่งตัว (deflection) และระยะเคลื่อนที่หรือระยะเบี่ยงเบน (tangential deviation) ของจุดต่าง ๆ บนองค์อาคาร การวิเคราะห์การโก่งตัวของโครงสร้าง มีจุดประสงค์ที่สำคัญอยู่ 2 ประการ คือ เพื่อตรวจสอบว่า องค์อาคารเกิดการโก่งตัวเกินกว่ามาตรฐานที่กำหนดไว้หรือไม่ ภายหลังจากรับน้ำหนักบรรทุก เช่น คาน หรือ พื้นคอนกรีตเสริมเหล็ก ถ้าการโก่งตัวมีมากเกินไป อาจทำให้เกิดการแตกร้าวของปูนฉาบใต้ท้องคานและพื้น หรือต้องมีการฉาบปูนเพื่อปรับระดับใต้ท้องคานและพื้น หรืออาจจะมีผลกระทบต่อส่วนอื่น ๆ ของโครงสร้างได้ ดังนั้น การออกแบบโครงสร้างจึงจำเป็นต้องให้ความสำคัญเรื่องนี้ด้วย ถึงแม้ว่าองค์อาคารจะมีกำลังเพียงพอ

ในการรับน้ำหนักบรรทุกก็ตาม และอีกประการหนึ่งเพื่อเป็นพื้นฐานเบื้องต้นของการวิเคราะห์โครงสร้างแบบยากหรือแบบอินดีเทอร์มิเนท หรือแบบหาค่าไม่ได้ โดยวิธีสถิตยศาสตร์ (statically indeterminate structuress)

6.2 ลักษณะการโก่งตัวของโครงสร้าง

การโก่งตัวขององค์อาคารเมื่อได้รับน้ำหนักบรรทุก จะมีลักษณะการโก่งตัวที่แตกต่างกันไปตามแบบและจำนวนของจุดรองรับ การเขียนเส้นแสดงลักษณะการโก่งตัวขององค์อาคารให้ถูกต้องจึงเป็นสิ่งจำเป็น ที่จะช่วยให้เกิดความเข้าใจและง่ายต่อการวิเคราะห์ มีคำเฉพาะที่ใช้ในการวิเคราะห์การโก่งตัวของโครงสร้าง อยู่หลายคำที่ต้องเข้าใจดังแสดงในรูปที่ 6.1 ดังนี้

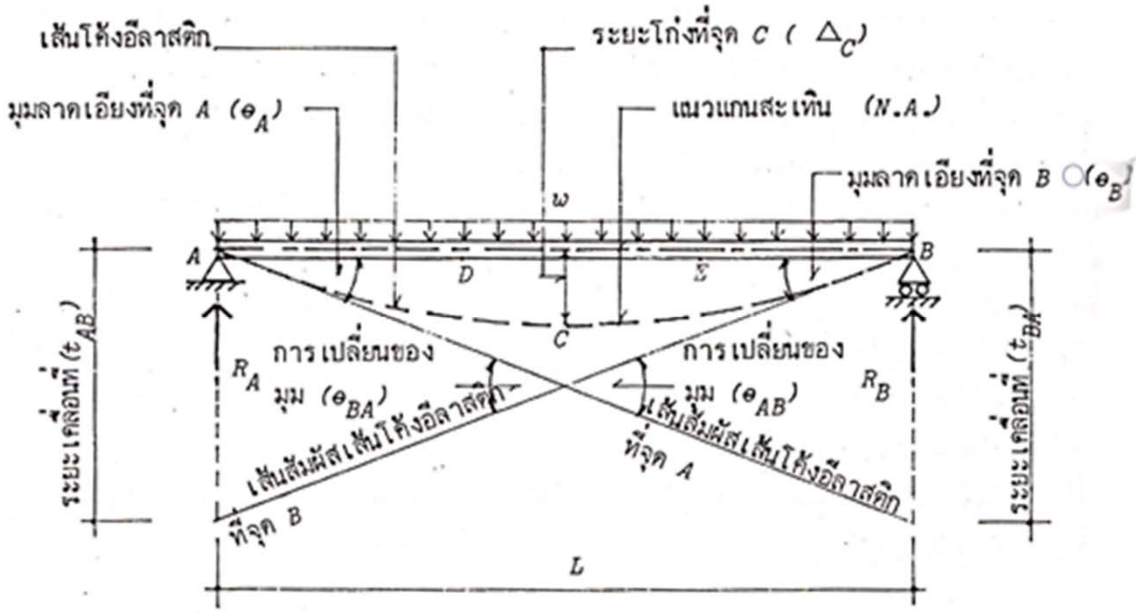
6.2.1 เส้นโค้งอีลาสติกหรือเส้นโค้งยืดหยุ่น (elastic curve) เป็นเส้นแสดงการโก่งตัวขององค์อาคารหลังจากรับน้ำหนักบรรทุก อยู่ในแนวของแกนสะเทิน (neutral axis ; N.A.) ขององค์อาคาร และเมื่อไม่คิดถึง การยืดหรือหดตัวขององค์อาคารเนื่องจากแรงตามแนวแกน เส้นโค้งอีลาสติกจะมีความยาวเท่ากับความยาวเดิมขององค์อาคารนั้นเสมอ

6.2.2 มุมลาดเอียง (slope) เป็นมุมที่วัดระหว่างแนวเดิมขององค์อาคารกับเส้นตรงที่ลากสัมผัสกับเส้นโค้งอีลาสติกตามแนวแกนสะเทิน ณ จุดใด จะเป็นมุมลาดเอียง (slope) ของจุดนั้น

6.2.3 การเปลี่ยนของมุม (angle change or change of slope) เป็นผลต่างของค่ามุมลาดเอียง ระหว่างจุดสองจุดบนเส้นโค้งอีลาสติกขององค์อาคาร

6.2.4 ระยะเคลื่อนที่หรือระยะเบี่ยงเบน (tangential deviation) เป็นระยะทางที่วัดตั้งฉากกับ แนวเดิมขององค์อาคารกับเส้นที่ลากสัมผัสกับเส้นโค้งอีลาสติก ตามแนวแกนสะเทิน ณ จุดใด เรียกว่า ระยะ เคลื่อนที่ (tangent) ของจุดนั้น

6.2.5 ระยะโก่งหรือระยะแอ่น (deflection) เป็นระยะทางที่วัดตั้งฉากจากแนวเดิมขององค์อาคารถึงเส้นโค้งอีลาสติก ณ จุดใด ๆ เรียกว่า เป็นระยะโก่งหรือระยะแอ่น (deflection) ของจุดนั้น ๆ



รูปที่ 6.1 ความลาดเอียงและการโก่งตัวของคาน

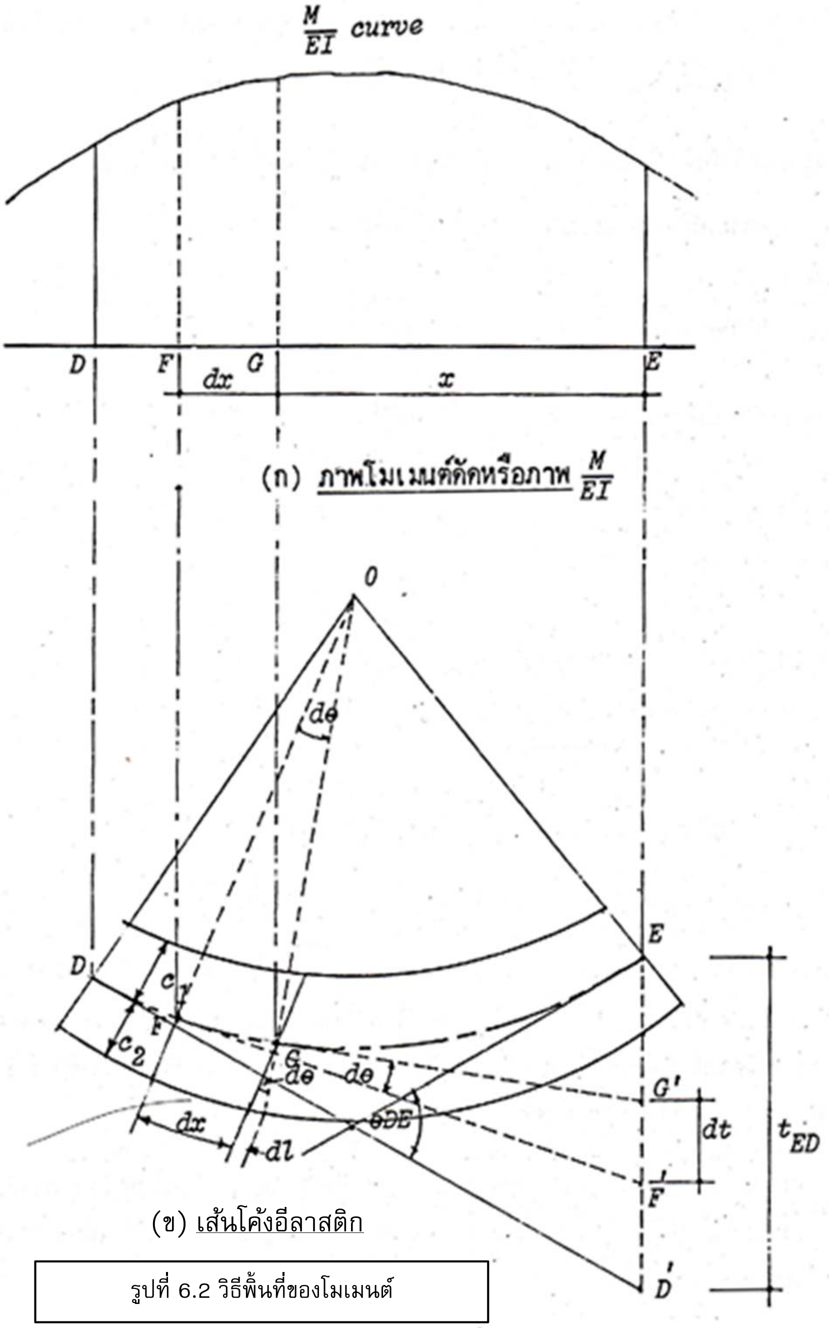
ที่มาของภาพ : ทฤษฎีโครงสร้าง ,สมปอง สง่าแสง ,กรมการฝึกหัดครู 2537

6.3 การวิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวของโครงสร้าง

การวิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวของโครงสร้างเมื่อรับน้ำหนักบรรทุก เป็นการวิเคราะห์หาค่ามุมลาดเอียง การเปลี่ยนของมุม ระยะเคลื่อนที่ และระยะโก่งขององค์อาคาร สามารถกระทำได้หลายวิธี ยากง่ายแตกต่างกัน ออกไปในที่นี้จะกล่าวถึงเพียง 2 วิธีเท่านั้น คือ วิธีโมเมนต์ของพื้นที่ (Moment – Area method) และวิธีคาน เสมือน (Conjugate-Beam method) ซึ่งเป็นวิธีที่สัมพันธ์กันและง่ายต่อการเข้าใจ และจะวิเคราะห์เฉพาะ การโก่งตัวของคานเพียงอย่างเดียว

6.3.1 วิธีพื้นที่ของโมเมนต์ (Moment-Area method)

การวิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวของ องค์อาคารด้วยวิธีนี้ อาศัยการเขียนเส้นโค้งอีลาสติก (elastic curve) ของคานเข้าประกอบในการวิเคราะห์ ผลการวิเคราะห์ทำให้เกิดทฤษฎีขึ้น 2 ทฤษฎี โดย ทฤษฎีที่หนึ่ง ใช้เพื่อหาค่าการเปลี่ยนของมุม (angle change or change of slope) และทฤษฎีที่สอง ใช้เพื่อหาระยะเคลื่อนที่ระหว่างเส้นสัมผัส (tangential deviation) เช่น คาน AB ดังรูปที่ 6.1 เมื่อได้รับน้ำหนักบรรทุกกระทำ คานจะเกิดการโก่งตัวภายใต้การกระทำของโมเมนต์ดัด และการโก่งตัวของคาน AB จะเป็นไปอย่างต่อเนื่องในลักษณะของเส้นโค้งอีลาสติก ซึ่งมีศูนย์กลางที่จุด O ใน ที่นี้จะพิจารณาช่วง DE ของคาน AB โดยแสดงไว้ในรูปที่ 6.2



รูปที่ 6.2 วิธีพื้นที่ของโมเมนต์

ที่มาของภาพ : ทฤษฎีโครงสร้าง ,สมปอง สง่าแสง ,กรมการฝึกหัดครู 2537

ทฤษฎีทั่วไป ระยะเคลื่อนที่หรือระยะเบี่ยงเบนของจุดใด ๆ บนเส้นโค้งอีลาสติก ซึ่งวัดตั้งฉากกับแนวเดิมของ องค์อาคารจากจุดนั้นกับเส้นสัมผัสเส้นโค้งอีลาสติก จากจุดอีกจุดหนึ่งบนเส้นโค้งอีลาสติกเดียวกัน จะมีค่าเท่ากับโมเมนต์ของพื้นที่ของภาพ **M/EI** ระหว่างจุดสองจุดนั้น รอบจุดที่จะหาระยะเคลื่อนที่

ก. ข้อควรสังเกต

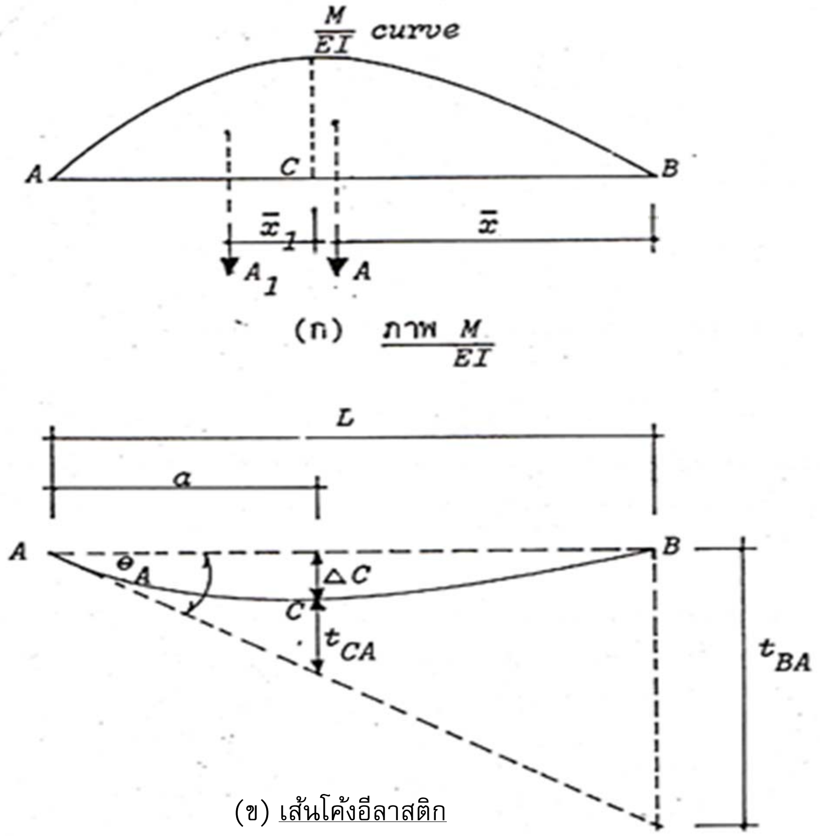
1) ระยะโก่งตัวของคาน ณ จุดใด หมายถึง ระยะที่วัดในแนวตั้งฉากจากแนวเดิมของ องค์อาคาร ไปยังจุดนั้นบนเส้นโค้งอีลาสติก ส่วนระยะเคลื่อนที่หรือระยะเบี่ยงเบนของจุด ๆ บนองค์อาคาร ตามทฤษฎีที่สอง หมายถึง ระยะที่วัดในแนวตั้งฉากกับแนวเดิมขององค์อาคาร จากจุดนั้นบนเส้นโค้งอีลาสติก ไปยังเส้นสัมผัสเส้นโค้งอีลาสติกที่ลากมาจาก

จุดหนึ่ง และค่าทั้งสองข้างต้นนี้ อาจเป็นค่าเดียวกันในบางกรณี

2) เมื่อต้องการจะหาระยะเคลื่อนที่หรือระยะเบี่ยงเบนของจุดใด ๆ จะต้องหาโมเมนต์ของพื้นที่ใต้ภาพ **M/EI** รอบจุดนั้น

3) วิธีพื้นที่ของโมเมนต์นี้ ไม่สามารถหาค่ามุมลาดเอียงและระยะโก่งได้โดยตรง แต่ เป็นการหาค่าที่สัมพันธ์กัน คือ ต้องอ้างอิงกับอีกจุดหนึ่งในองค์อาคาร ซึ่งทราบค่ามุมลาดเอียงหรือระยะโก่งแล้ว

เช่น รูปที่ 6.4 ต้องการหามุมลาดเอียงที่จุด A (θ_A) และระยะโก่งที่จุด C (Δ_C) มีวิธีทำการหาได้ดังนี้



(ข) เส้นโค้งอีลาสติก

รูปที่ 6.3 การวิเคราะห์โดยวิธีพื้นที่ของโมเมนต์

ที่มาของภาพ : ทฤษฎีโครงสร้าง ,สมปอง สง่าแสง ,กรมการฝึกหัดครู 2537

มุมลาดเอียงที่จุด A(θ_A)

$$\theta_A = \frac{t_{BA}}{L}$$

t_{BA} = ระยะเคลื่อนที่หรือระยะเบี่ยงเบนของจุด B วัดในแนวตั้งฉากกับแนวเดิมของคาน จากจุด B บนเส้นโค้งอีลาสติก ถึงเส้นสัมผัสเส้นโค้งอีลาสติกที่ลากจากจุด A

= โมเมนต์ของพื้นที่ใต้ภาพ M/EI ระหว่างจุด A กับจุด B รอบจุด B

= $A\bar{x}$

$$\text{จะได้มุมลาดเอียงที่จุด A ; } \theta A = \frac{A\bar{x}}{L}$$

ระยะโก่งที่จุด C (Δc)

$$\theta A = \frac{\Delta c + t_{CA}}{a}$$

$$\theta A.a = \Delta c + t_{CA}$$

$$\Delta c = (\theta A.a) - t_{CA}$$

แต่ $\theta A = \frac{A\bar{x}}{L}$ และ

t_{CA} = ระยะเคลื่อนที่หรือระยะเบี่ยงเบนของจุด C วัดในแนวตั้งฉากกับแนวเดิมของคาน จากจุด C บนเส้นโค้งอีลาสติก ถึงเส้นสัมผัสเส้นโค้งอีลาสติกที่ลากจากจุด A

= โมเมนต์ของพื้นที่ใต้ภาพ M/EI ระหว่างจุด A กับจุด C รอบจุด C

= $A_1 \bar{x}_1$

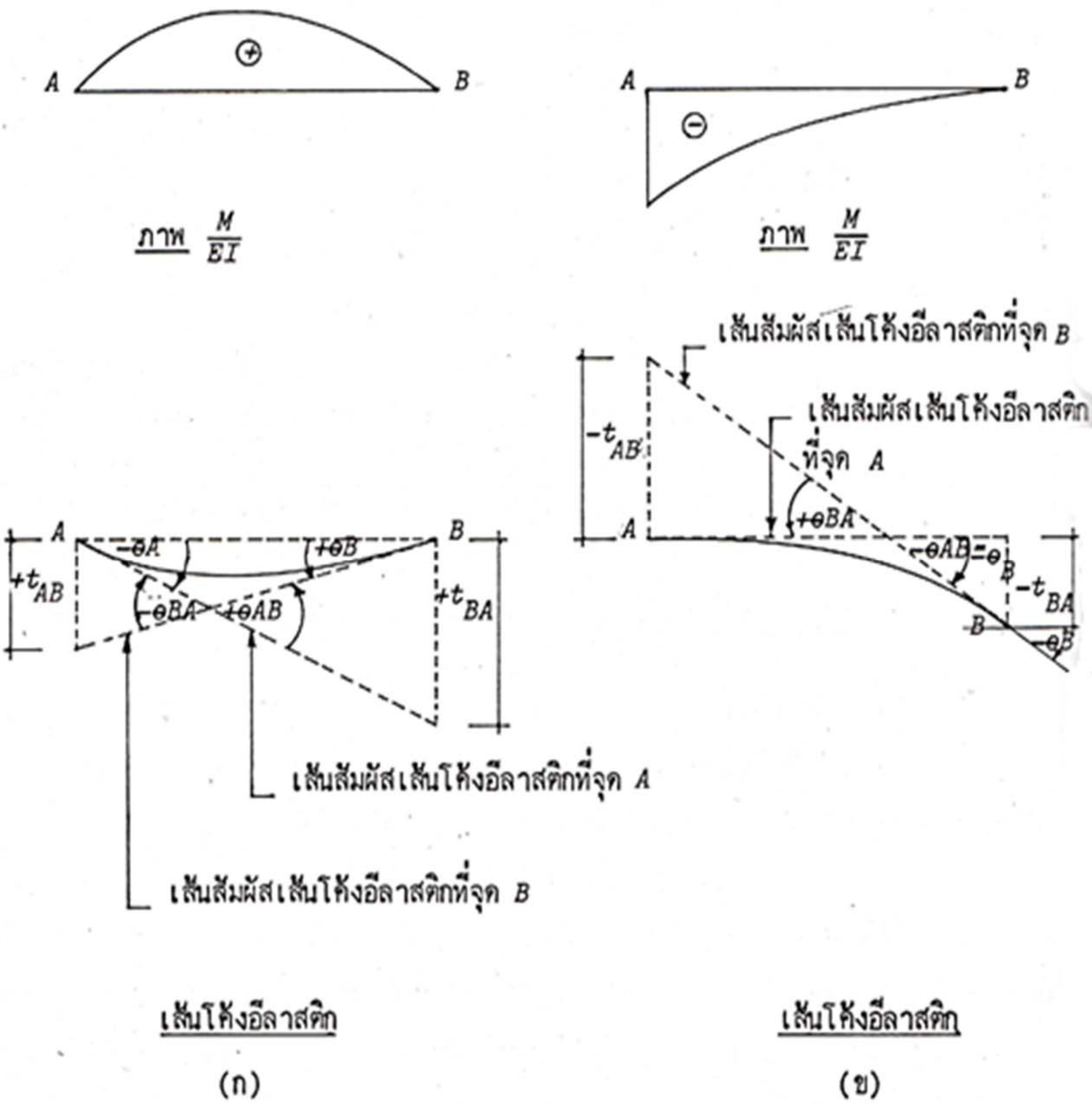
$$\text{จะได้มุมลาดเอียงที่จุด C ; } \Delta C = \frac{A\bar{x}a}{L} - A_1\bar{x}_1$$

ข. เครื่องหมาย

1) ภาพโมเมนต์ดัด หรือภาพ **M/EI** จะเขียนอยู่บนองค์อาคารด้านที่รับแรงอัด และ มีค่าเป็น**บวก** (+) เมื่ออยู่เหนือแนวแกนสะเทิน และมีค่าเป็น**ลบ** (-) เมื่ออยู่ใต้แนวแกนสะเทิน

2) การเปลี่ยนของมุมที่เปลี่ยนจากซ้ายมือไปขวามือ ระหว่างจุดสองจุดบนเส้นโค้ง อีลาสติก จะมีค่าเป็น**บวก** (+) ถ้ามุมนั้นวัดจากเส้นสัมผัสเส้นโค้งอีลาสติกกับจุดทางซ้ายมือมายังเส้นสัมผัส เส้นโค้งอีลาสติกกับจุดทางขวามือในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา หรือกรณีที่ภาพ **M/EI** มีค่าเป็น**บวก** (+) ดังรูป ที่ 6.4 (ก) และจะมีค่าเป็น**ลบ** (-) ถ้ามุมนั้นวัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา หรือกรณีที่ภาพ **M/EI** มีค่าเป็น **ลบ** (-) ดังรูปที่ 6.5 (ข) และให้สังเกตว่าการเปลี่ยนของมุมจากซ้ายไปขวา จะเท่ากับขวาไปซ้ายเสมอ (ตาม รูปที่ 6.5 คือ θAB จะเท่ากับ θBA)

3) ระยะเคลื่อนที่หรือระยะเบี่ยงเบนของจุดใด ๆ จะมีค่าเป็น**บวก** (+) เมื่อจุดนั้นอยู่เหนือ เส้นสัมผัสเส้นโค้งอีลาสติก หรือกรณีที่ภาพ **M/EI** มีค่าเป็น**บวก** (+) ดังรูปที่ 6.5 (ก) และจะมีค่าเป็น**ลบ** (-) เมื่อจุดนั้นอยู่ใต้เส้นสัมผัสเส้นโค้งอีลาสติก หรือกรณีที่ภาพ **M/EI** มีค่าเป็น**ลบ** (-) ดังรูป 6.5 (ข) และให้ สังเกตว่าค่าของระยะเคลื่อนที่หรือระยะเบี่ยงเบนของจุดทางซ้ายมือกับจุดทางขวามือไม่จำเป็นต้องเท่ากัน (ตามรูปที่ 6.5 คือ t_{AB} ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ t_{BA})



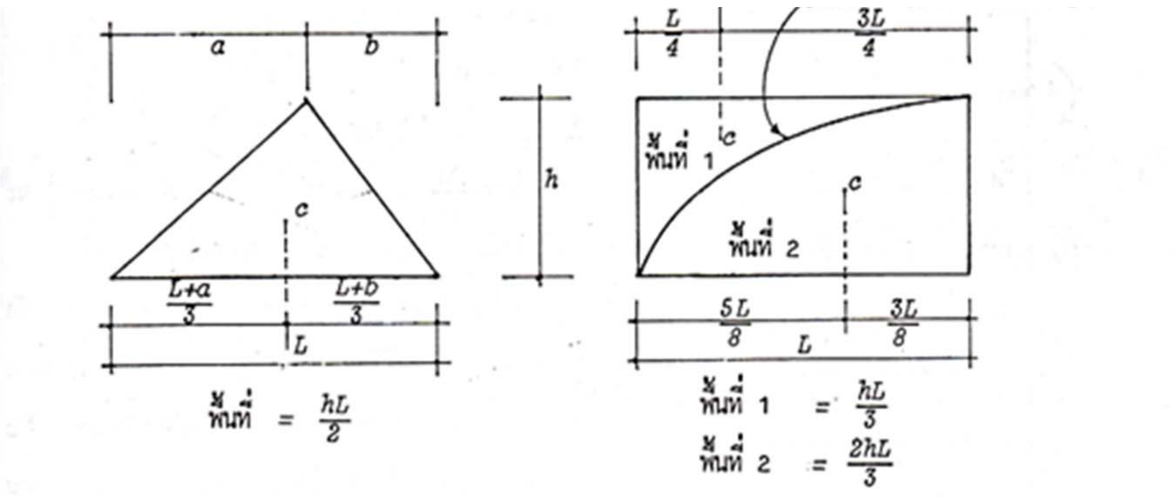
รูปที่ 6.4 เครื่องหมาย

ที่มาของภาพ : ทฤษฎีโครงสร้าง ,สมปอง ส่งแสง ,กรมการฝึกหัดครู 2537

ค. คุณสมบัติของภาพโมเมนต์ดัดหรือภาพ ·

การวิเคราะห์การโก่งตัวของโครงสร้าง โดยวิธีพื้นที่ของโมเมนต์ (Moment – Area method) ที่กล่าวถึงนี้และวิธีคานเสมือน (Conjugate–Beam method) ที่จะกล่าวถึงต่อไปจะต้องใช้พื้นที่และ โมเมนต์ของภาพ **M/EI** ขององค์อาคาร เพื่อคำนวณหาค่าการเปลี่ยนของมุมและระยะเคลื่อนที่หรือระยะเบี่ยงเบน – ดังนั้น จึงจำเป็นต้องทราบคุณสมบัติในด้านพื้นที่ และตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของพื้นที่ (center of area) หรือจุดเซนทรอยด์ (centroid) ของภาพ **M/EI** ซึ่งเป็นรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 6.5

เส้นโค้งพาราโบล่ากำลังสอง



(ก) รูปสามเหลี่ยมใด ๆ

(ข) รูปพาราโบล่ากำลังสอง

รูปที่ 6.5 คุณสมบัติของภาพโมเมนต์ดัด หรือภาพ M/EI

ที่มาของภาพ : ทฤษฎีโครงสร้าง ,สมปอง สง่าแสง ,กรมการฝึกหัดครู 2537

ง. ลำดับขั้นการวิเคราะห์

จากทฤษฎีทั่วไป ของวิธีพื้นที่ของโมเมนต์ที่กล่าวถึงข้างต้น สามารถวิเคราะห์การโก่งตัวของโครงสร้าง ณ จุดต่าง ๆ ขององค์อาคารได้ โดยมีลำดับขั้นการวิเคราะห์ ดังต่อไปนี้

1) คำนวณหาแรงปฏิกิริยาและโมเมนต์ดัดของคานที่กำหนดให้

2) เขียนภาพ **M/EI** โดยการหารค่าโมเมนต์ดัดของทุกจุดด้วย **EI** ซึ่งเป็นค่าความ แข็งแรงในการต้านทานโมเมนต์ดัด ในกรณีที่คานมีค่า **EI** คงที่ ภาพ **M/EI** จะคล้ายกับภาพโมเมนต์ดัด

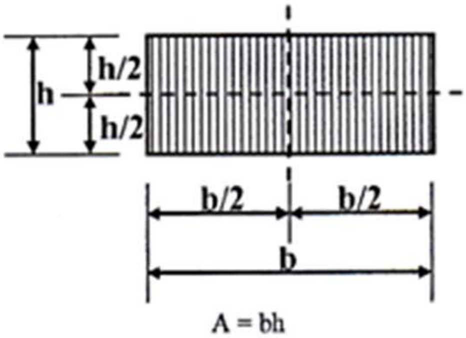
3) เขียนเส้นโค้งอีลาสติกแสดงลักษณะการโก่งตัวของคานให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริง

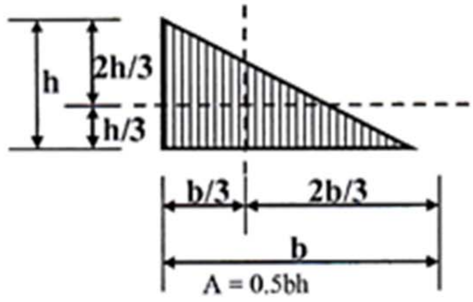
4) เลือกจุดบนเส้นโค้งอีลาสติกแล้วลากเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดนั้น จุดที่เลือกนี้ควร จะเป็นจุดที่ทราบค่าแน่นอนของมุมลาดเอียง เช่น จุดรองรับแบบยึดแน่นจะมีค่าของมุมลาดเอียงเท่ากับศูนย์ หรืออาจจะเลือกจุดที่โจทย์กำหนดค่าที่แน่นอนมาให้

5) ใช้ทฤษฎีหนึ่ง และ/หรือทฤษฎีสอง คำนวณหาค่าการเปลี่ยนของมุม และ/หรือ ระยะเคลื่อนที่หรือระยะเบี่ยงเบนของจุดอื่นที่ต้องการโดยเทียบกับจุดที่เลือกในข้อที่ 4)

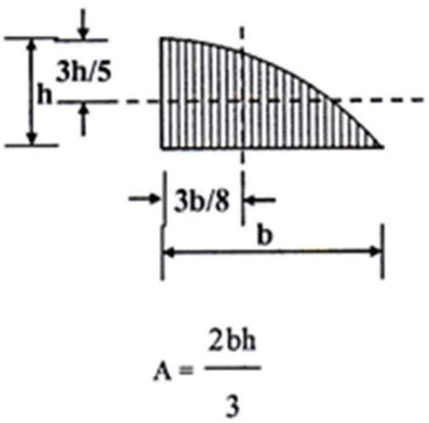
6) คำนวณหามุมลาดเอียงและระยะโก่งตัวของคาน โดยพิจารณาเส้นโค้งอีลาสติก ประกอบ

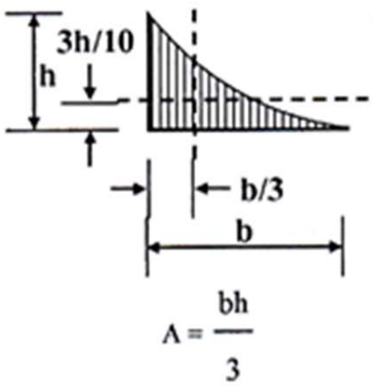
สี่เหลี่ยมผืนผ้า	สามเหลี่ยม



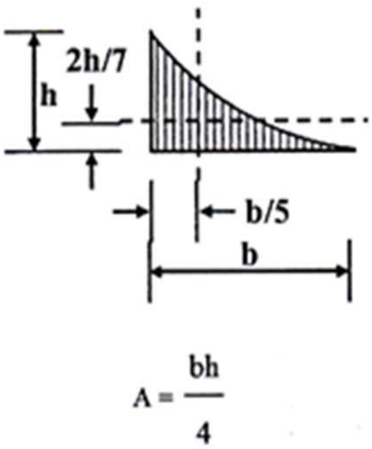


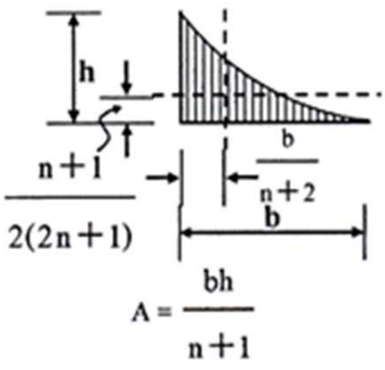
พาราโบลากำลังสอง	พาราโบลากำลังสอง





พาราโบลากำลังสาม	พาราโบลากำลัง n



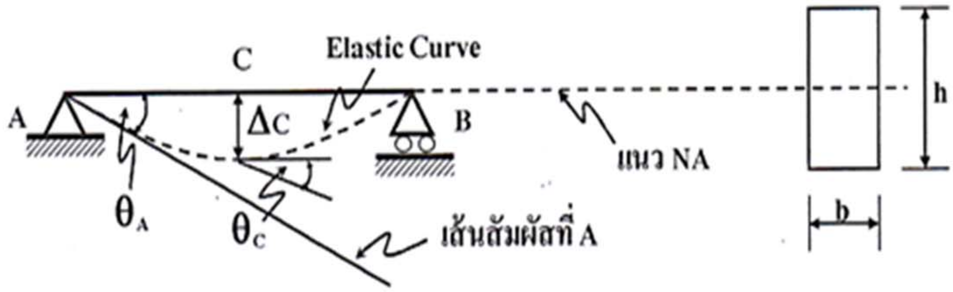


ที่มาของตาราง : คู่มือการสอนทฤษฎีโครงสร้าง ,ศิวณัฐ ลิมกุล , 2555

6.6 วิธี Moment-Area

วิธีนี้ใช้การเขียนรูปของเส้นโค้งอีลาสติคเข้าประกอบในการคำนวณเพื่อหามุมลาดเอียงและระยะโก่งตัว ทฤษฎีที่ใช้คำนวณมีอยู่ 2 ทฤษฎี ทฤษฎีที่หนึ่งจะใช้เพื่อหาการเปลี่ยนของมุม (Angle Change) ทฤษฎีที่สองจะใช้เพื่อหาระยะเคลื่อนที่ระหว่างเส้นสัมผัส(Tangent Deviation)

นั่นคือ เป็นการนำพื้นที่ของ Moment Diagram มาหาการแอ่นตัวของคาน

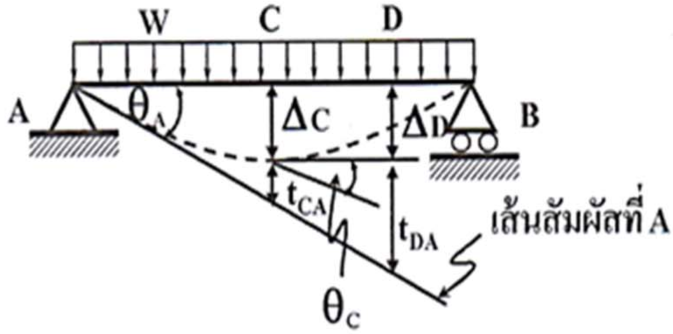


การวัดมุมเราจะวัดจากเส้นสัมผัสไปหาแนวคานเดิมเป็นมุม

6.6.1 <u>ทฤษฎีของ Moment – Area</u>

<u>ทฤษฎีที่ 1</u> มุมระหว่างเส้นสัมผัสจากจุดสองจุดบนเส้นโค้งอีลาสติคหรือการเปลี่ยนของมุมจากจุดหนึ่งบนเส้นโค้งอีลาสติค ไปยังอีกจุดหนึ่งบนเส้นโค้งอีลาสติคนี้ จะมีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้กราฟของ $\frac{M}{EI}$ ระหว่างจุดทั้งสองนั้น

$\therefore \theta_A \Rightarrow \theta_C$ = พื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ Diagram ระหว่างจุด A ถึงจุด C

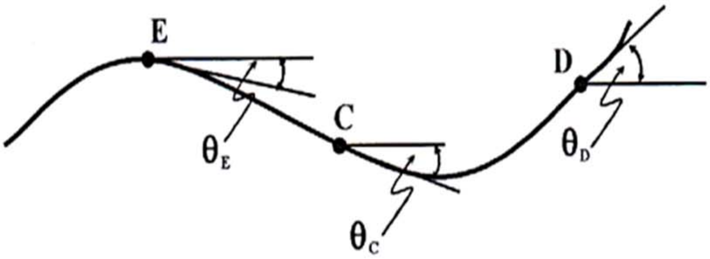


t_{CA} = ?

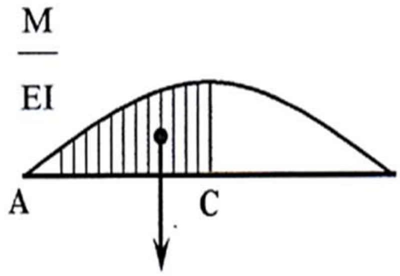
C = ที่จุด C

A = เนื่องจากลากสันสัมผัสที่จุด A

ที่มาของเนื้อหาและรูปภาพ : คู่มือการสอนทฤษฎีโครงสร้าง ,ศิวณัฐ ลิมกุล , 2555



ถ้าต้องการหาค่ามุมจุดไหน ให้ลากเส้นสัมผัสที่จุดนั้น



พื้นที่ A-C ของ M Diagram จะเท่ากับค่าความแตกต่างระหว่างมุม 2 มุม คือ θ_A และ θ_C

$$\theta_{AB} = \left(\frac{M}{EI}\right)_{AB} \qquad \text{(หน่วยเป็น Radian)}$$

<u>ทฤษฎีที่ 2</u> ระยะเคลื่อนที่ t_{BA} ของจุด B บนเส้นโค้งอีลาสติค ซึ่งวัดตั้งฉากกับแนวเดิมของส่วนโครงสร้างกับเส้นสัมผัสซึ่งลากสัมผัสจากจุด A บนเส้นโค้งอีลาสติคเดียวกัน จะมีค่าเท่ากับโมเมนต์รอบจุด B ของพื้นที่ใต้กราฟของ $\frac{M}{EI}$ ระหว่างจุดทั้งสองนั้น

t_{CA} = โมเมนต์ของ $\frac{M}{EI}$ Diagram ระหว่าง C-A หมุนรอบจุด C

t = Tangential Diviation

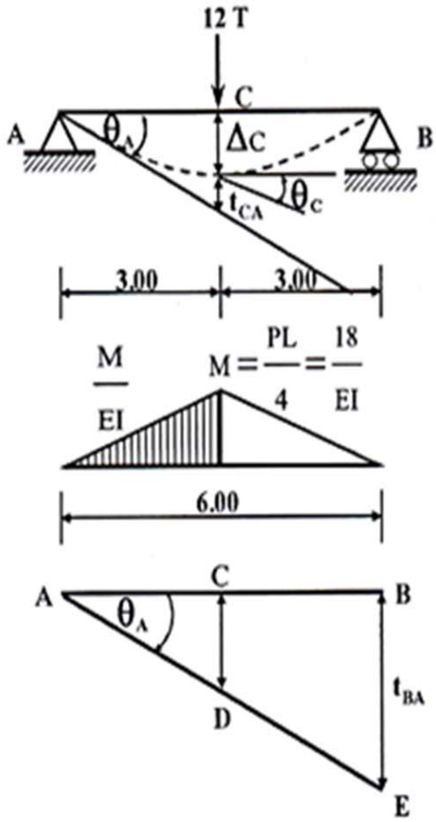
C = จุดที่วัด Deflection

A = จุดที่ลาก Tangent

ในการคำนวณหาค่า Slope และ Deflection ของคาน โดยวิธีพื้นที่โมเมนต์ จำเป็นจะต้องทราบพื้นที่ของ BMD พร้อมทั้งตำแหน่งของจุดศูนย์ถ่วง

ที่มาของเนื้อหาและรูปภาพ : คู่มือการสอนทฤษฎีโครงสร้าง ,ศิวณัฐ ลิมกุล , 2555

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการของ Rotation การโก่งตัวของคาน (Deflection) θ Δ จากสมการเส้นโค้งอีลาสติก



ทฤษฎีที่ 1

$$\theta_A - \theta_C = \text{พื้นที่ของ } \frac{M}{EI} \text{ Diagram ระหว่าง A-C}$$

$$\theta_A = \frac{3(18)}{2EI}$$

$$\theta_A = \frac{27}{EI}$$

ทฤษฎีที่ 2

$$t_{BA} = \text{โมเมนต์ของ } \frac{M}{EI} \text{ Diagram ระหว่าง B-A หมุนรอบจุด B}$$

$$t_{BA} = \frac{6(3)(18)}{2EI}$$

$$t_{BA} = \frac{162}{EI}$$

จากทฤษฎีสามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{CD}{3} = \frac{t_{BA}}{6}$$

$$CD = \frac{162(3)}{6EI}$$

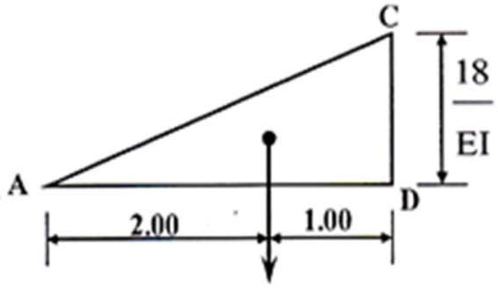
$$CD = \frac{81}{EI}$$

ที่มาของเนื้อหาและรูปภาพ : คู่มือการสอนทฤษฎีโครงสร้าง ,ศิวณัฐ ลิมกุล , 2555

หา Δ_c หาคา Δ ได 2 วธ คอ

1

$$t_{CA} = \text{โมเมนต์ของ} \frac{M}{EI} \text{ Diagram ระหว่าง C-A หมุนรอบจุด C}$$



$$t_{CA} = \frac{2(18)(1)}{2EI}$$

$$t_{CA} = \frac{27}{EI}$$

$$\Delta_c = CD - t_{CA}$$

$$= \frac{81}{EI} - \frac{27}{EI}$$

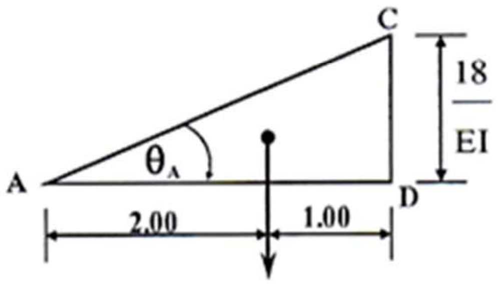
$$\Delta_c = \frac{54}{EI}$$

2

$$t_{AC} = \text{โมเมนต์ของ} \frac{M}{EI} \text{ Diagram ระหว่าง A-Cหมุนรอบจุด A}$$

$$\Delta_c = t_{AC}$$

$$t_{AC} = \theta_A (2)$$



$$= \frac{27(2)}{EI}$$

$$t_{AC} = \frac{54}{EI}$$

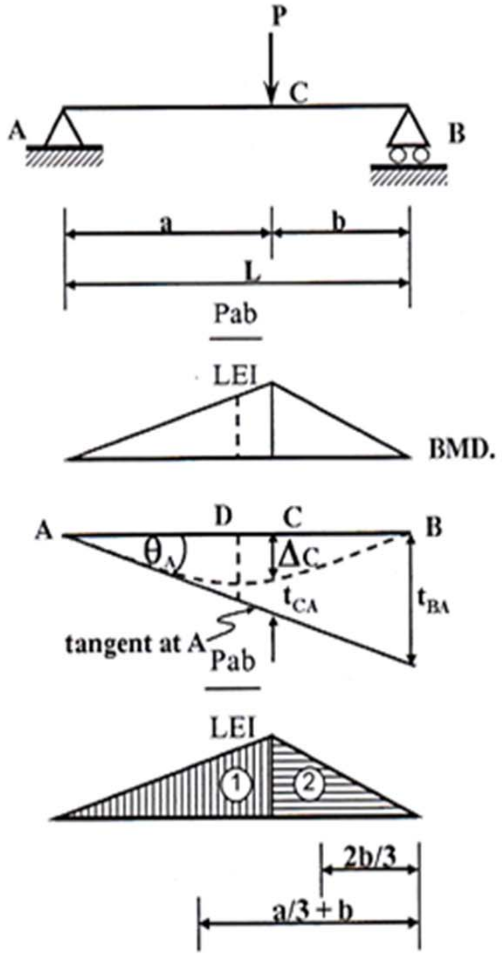
$$t_{AC} = \frac{3(18)(2)}{2EI}$$

$$= \frac{54}{EI}$$

ที่มาของเนื้อหาและรูปภาพ : คู่มือการสอนทฤษฎีโครงสร้าง ,ศิวณัฐ ลิมกุล , 2555

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงหาระยะการโก่งตัวที่จุด C และมุมลาดเอียงที่จุด A ของคานช่วงเดียวรับน้ำหนักดังรูป และ

คำนวณหาตำแหน่งและขนาดของการโก่งที่มากที่สุด กำหนดให้ EI มีค่าคงที่ตลอดความยาวคาน



จากสมการสมดุล

$\Sigma MA = 0$

$$RB(L) - Pa = 0$$

$$RB = \frac{Pa}{L}$$

$\Sigma MB = 0$

$$RA(L) - Pb = 0$$

$$RA = \frac{Pb}{L}$$

$$MC = \frac{Pab}{L}$$

$$\theta A = \frac{t_{BA}}{L}$$

$$\theta A = \frac{\Delta C + t_{CA}}{a}$$

$$\Delta C = \theta_A . a - t_{CA}$$

จากทฤษฎีที่ 2 ของ Moment Area

$$t_{BA} = \text{โมเมนต์ของ } \frac{M}{EI} \text{ Diagram ระหว่าง B-A หมุนรอบจุด B}$$

$$= [\text{ พื้นที่ที่ } 1 \times \left(\frac{a}{3} + b\right)] + [\text{ พื้นที่ที่ } 2 \times \left(\frac{2b}{3}\right)]$$

$$= \left[\frac{1}{2}.a.\frac{Pab}{LEI}\left(\frac{a}{3} + b\right)\right] + \left[\frac{1}{2}.b.\frac{Pab}{LEI}\frac{2b}{3}\right]$$

$$= \frac{Pa^3b}{6LEI} + \frac{Pa^2b^2}{2LEI} + \frac{Pab^3}{3LEI}$$

ที่มาของเนื้อหาและรูปภาพ : คู่มือการสอนทฤษฎีโครงสร้าง ,ศิวณัฐ ลิมกุล , 2555

$Pab(L + b)$

$$t_{BA} = \frac{Pab(L+b)}{6EI}$$

$$\therefore \quad \theta_A = \frac{t_{BA}}{L} = \frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

จากทฤษฎีที่ 2 ของ Moment Area

$$t_{CA} = \text{โมเมนต์ของ } \frac{M}{EI} \text{ Diagram ระหว่าง C-A หมุนรอบจุด C}$$

$$= \text{พื้นที่ที่ } 1 \times \frac{a}{3}$$

$$= \frac{1}{2}.a.\frac{Pab}{LEI}\frac{a}{3}$$

$$t_{CA} = \frac{Pa^3b}{6LEI}$$

แต่ $\Delta_C = \theta_A.a - t_{CA}$

$$\Delta_C = a.\frac{Pab(L+b)}{6LEI} - \frac{Pa^3b}{6LEI}$$

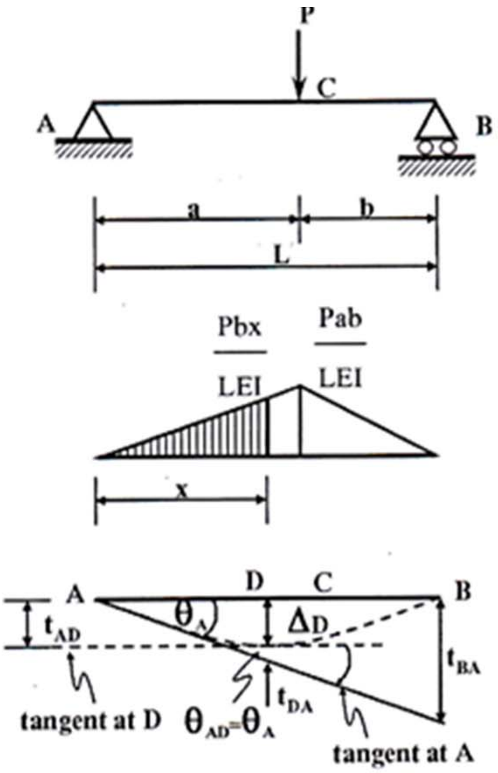
$$= \frac{Pa^2b(L+b)}{6LEI} - \frac{Pa^3b}{6LEI}$$

$$\Delta_C = \frac{Pa^2b^2}{3LEI} \Downarrow$$

คำนวณหาตำแหน่ง และขนาดของการโก่งตัวมากที่สุด

สมมุติให้ตำแหน่งของการโก่งตัวมากที่สุดอยู่ที่จุดมีระยะห่างจาก A เท่ากับ x มุมลาดเอียงที่จุดนี้ จะมีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ เส้นสัมผัสกับเส้นโค้งอีลาสติกที่จุด D จะอยู่ในแนวระดับ

ที่มาของเนื้อหาและรูปภาพ : คู่มือการสอนทฤษฎีโครงสร้าง ,ศิวณัฐ ลิมกุล , 2555



จากรูป จะได้ $\theta_{AD} = \theta_A$ แทนค่า θ_{AD} , θ_A

$$\frac{1}{2}.x.\frac{Pbx}{LEI} = \frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

$$\frac{Pbx^2}{2LEI} = \frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

$$x^2 = \frac{Pab(L+b)}{6LEI}.\frac{2LEI}{Pb}$$

$$= \frac{a(L+b)}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{a(L+b)}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}$$

จากรูประยะการโก่งตัวมากสุด $\Delta_{max} = t_{AD}$

$$\Delta_{max} = \frac{1}{2}.x.\frac{Pbx}{LEI}.\frac{2}{3}.x$$

$$= \frac{Pbx^3}{3LEI}$$

แทนค่า $x = \sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}$

$$= \frac{Pb}{3LEI}\left(\sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}\right)^3$$

$$\Delta_{max} = \frac{Pb}{9\sqrt{3}LEI}\sqrt{\left(L^2-b^2\right)^3}$$

ที่มาของเนื้อหาและรูปภาพ : คู่มือการสอนทฤษฎีโครงสร้าง ,ศิวณัฐ ลิมกุล , 2555