แรงกระจาย

สาระสำคัญ

แรงที่กระทำต่อวัตถุในแต่ละจุดเป็นแรงแบบเดี่ยว แต่เมื่อมีแรงกระทำต่อวัตถุหลายๆ แรง จะสามารถแทนด้วยแรงลัพธ์หรือแรงรวมกระทำที่จุดจุดหนึ่งได้ แต่โดยความเป็นจริงแล้ว วัตถุจะมีแรงกระทำกระจายอยู่ในพื้นที่หรือปริมาตร การวิเคราะห์จุดที่แรงลัพธ์กระทำนั้นถือเป็นสิ่งสำคัญ เช่นเดียวกับน้ำหนักของวัตถุ จุดศูนย์กลางของน้ำหนักของวัตถุเรียกว่า จุดศูนย์ถ่วง (Center of Gravity) ในส่วนนี้จะศึกษาการวิเคราะห์หาจุดศูนย์ถ่วงของวัตถุ จุดศูนย์กลางมวล และจุดเซนทรอยด์

สาระการเรียนรู้

1. จุดศูนย์ถ่วง
2. จุดเซนทรอยด์ของพื้นที่
3. โมเมนต์อันดับหนึ่งของพื้นที่
4. จุดเซนทรอยด์ของรูปเรขาคณิต

สมรรถนะประจำหน่วย

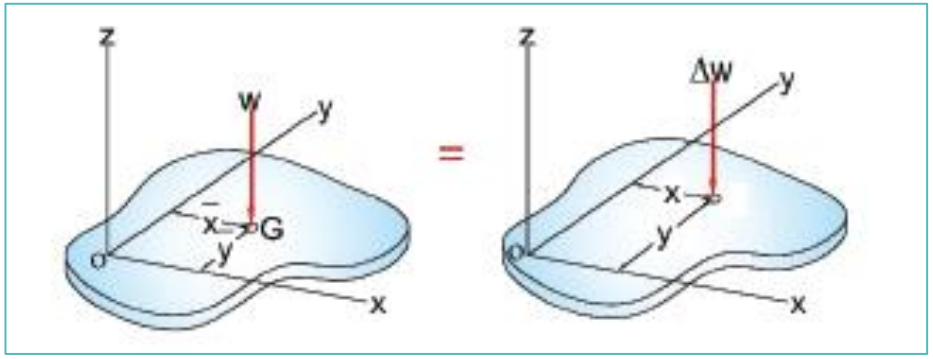
1. แสดงความรู้เกี่ยวกับการหาจุดแรงลัพธ์ของแรงกระจาย
2. คำนวณหาตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วง จุดศูนย์กลางของมวล และจุดเซนทรอยด์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. คำนวณหาจุดศูนย์ถ่วงได้
2. คำนวณหาจุดเซนทรอยด์ของพื้นได้
3. คำนวณหาโมเมนต์อันดับหนึ่งของพื้นที่ได้
4. วิเคราะห์แรงกระจายรูปเรขาคณิตได้

จุดศูนย์ถ่วง

จากรูปสามารถแบ่งแผ่นแพลตเป็นชิ้นย่อยๆ ได้ n ส่วน พิกัดของส่วนแรก คือ x_1 และ y_1
พิกัดของส่วนที่สอง คือ x_2 และ y_2 น้ำหนักของชิ้นส่วนเพลต คือ $\Delta W_1 + \Delta W_2 + \ldots + \Delta W_n$ ทิศทางของ W มีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางของโลก ได้ว่า



$$\Sigma F_2 : W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \ldots + \Delta W_n$$

ให้ $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ เป็นพิกัดของจุดศูนย์ถ่วง (G) และ W คือ น้ำหนักรวมของเพลต ได้ว่า

$$\Sigma M_y: \bar{x}W = x_1 \Delta W_1 + x_2 \Delta W_2 + \ldots + x_n \Delta W_n$$

$$\Sigma M_x: \bar{y}W = y_1 \Delta W_1 + y_2 \Delta W_2 + \ldots + y_n \Delta W_n$$

จุดเซนทรอยด์ของพื้นที่

ในกรณีที่แผ่นเพลตมีความสม่ำเสมอกันทั่วทั้งแผ่น น้ำหนักของชิ้นส่วนย่อยๆ ของแผ่นเพลต เขียนได้ดังนี้

$$\Delta W = y_t \Delta A$$

เมื่อ y คือ น้ำหนักจำเพาะ

t คือ ความหนาของแผ่นเพลต

ΔA คือ พื้นที่ย่อย

จากสมการ

$$\Sigma M_{\bar{y}}: \bar{x}W = x_1 \Delta W_1 + x_2 \Delta W_2 + \dots + x_n \Delta W_n$$
$$\Sigma M_{\bar{x}}: \bar{y}W = y_1 \Delta W_1 + y_2 \Delta W_2 + \dots + y_n \Delta W_n$$

สามารถตัด y_t ออกได้ว่า

$$\Sigma M_{\bar{y}}: \bar{x}A = x_1 \Delta A_1 + x_2 \Delta A_2 + \dots + x_n \Delta A_n$$
$$\Sigma M_{\bar{x}}: \bar{y}A = y_1 \Delta A_1 + y_2 \Delta A_2 + \dots + y_n \Delta A_n$$

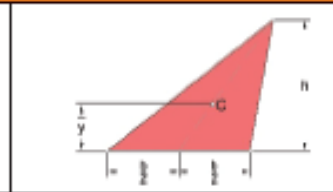
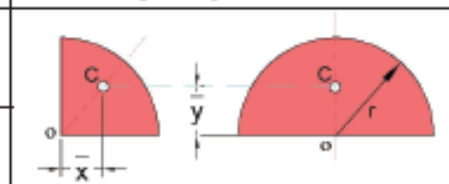
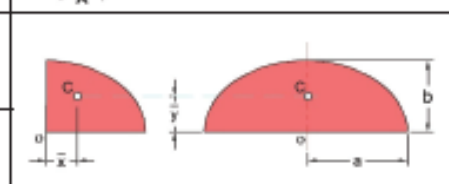
โมเมนต์อันดับหนึ่งของพื้นที่

จากสมการ

$$\Sigma M_{\bar{y}}: \bar{x}A = x_1 \Delta A_1 + x_2 \Delta A_2 + \ldots + x_n \Delta A_n$$
$$\Sigma M_{\bar{x}}: \bar{y}A = y_1 \Delta A_1 + y_2 \Delta A_2 + \ldots + y_n \Delta A_n$$

ทราบว่า $\bar{x}A$ คือ โมเมนต์อันดันหนึ่งของพื้นที่ A ตามแกน y และให้สัญลักษณ์ว่า Q_y คือ โมเมนต์อันดับหนึ่งของพื้นที่ A ตามแนวแกน x และให้สัญลักษณ์ว่า นั่นคือ

$$Q_y = \bar{x}A \qquad Q_x = \bar{y}A$$

รูปทรง		$\bar{x}$	$\bar{y}$	สูตรพื้นที่
สามเหลี่ยม		–	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
ครึ่งของครึ่งวงกลม		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
ครึ่งวงกลม		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
ครึ่งของครึ่งวงรี		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
ครึ่งวงรี		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$

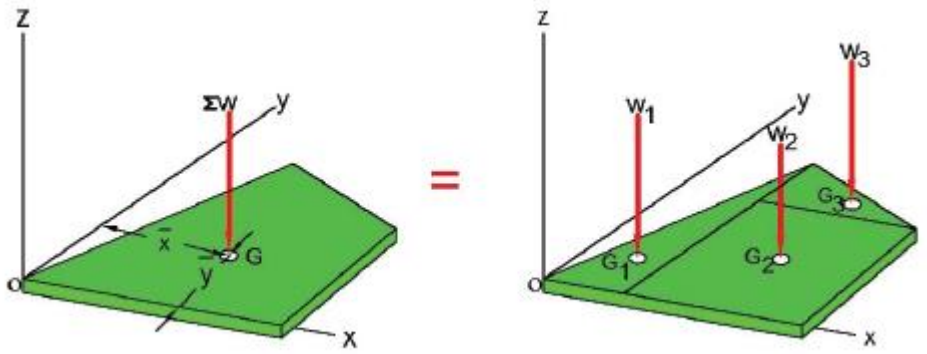
จุดเซนทรอยด์ของพื้นที่รูปทรงต่างๆ

จุดเซนทรอยด์ของรูปเรขาคณิต

การคำนวณจุดศูนย์ถ่วงรูปเรขาคณิตนี้ ทำได้โดย หาค่าพิกัดจุดศูนย์ถ่วงของแต่ละรูปย่อยแล้วนำมาคำนวณในสมการโมเมนต์ ดังนี้

$$\Sigma M_y : \bar{X}(W_1 + W_2 + \ldots + W_n) = \bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2 + \ldots + \bar{x}_n W_n \quad (ก)$$

$$\Sigma M_x : \bar{Y}(W_1 + W_2 + \ldots + W_n) = \bar{y} W_1 + \bar{y}_2 W_2 + \ldots + \bar{y}_n W_n$$



จุดศูนย์ถ่วงของรูปเรขาคณิต

จุดเซนทรอยด์ของรูปเรขาคณิต

จากสมการ (ก) สามารถเขียนสมการสรุปได้ดังนี้

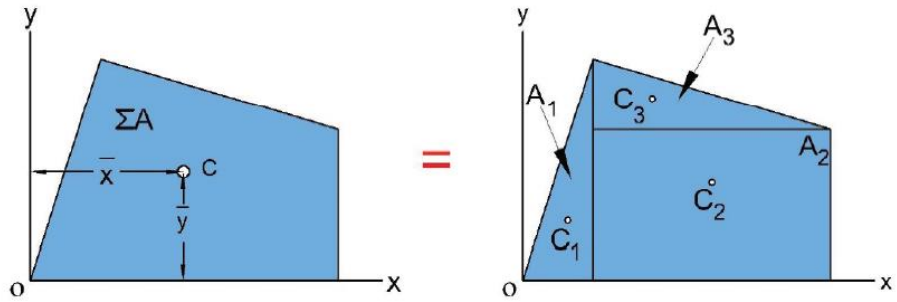
$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x}W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y}W \qquad (ข)$$

โดยที่ $\bar{X}$ และ $\bar{Y}$ คือ พิกัดจุดศูนย์ถ่วงของแผ่นเพลต

ในกรณีที่แผ่นเพลตมีความสม่ำเสมอกันและมีความหนาเท่ากันทั้งแผ่น จุดศูนย์ถ่วงของแผ่นเพลตจะอยู่จุดเดียวกันกับจุดเซนทรอยด์ของพื้นที่ เมื่อจุดเซนทรอยด์ของพื้นที่อยาจุด C การหาพิกัด X และ Y หาโดยการแบ่งเพลตเป็นรูปย่อยๆ และหาพิกัดของแต่ละพื้นที่ย่อย จากนั้น หาพิกัดของจุดเซนทรอยด์รวม ดังสมการ (ค)

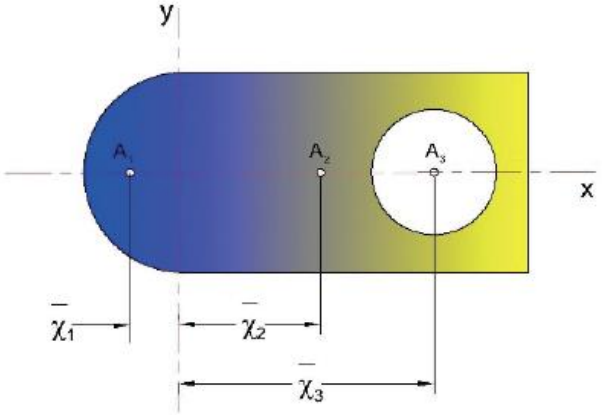
$$Q_y = \bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x}W \qquad Q_x = \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y}W \qquad (ค)$$

จุดเซนทรอยด์ของรูปเรขาคณิต



จุดศูนย์ถ่วงของรูปเรขาคณิต

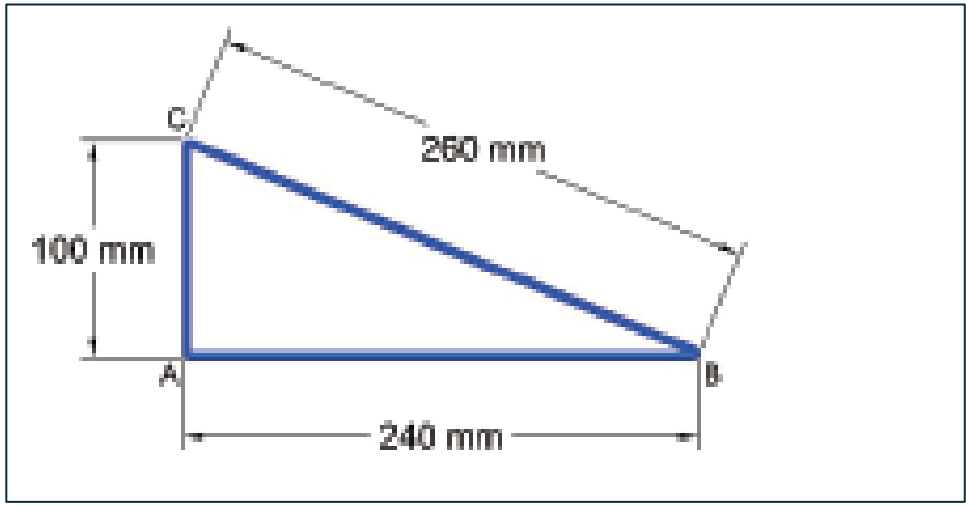
การหาจุดเซนทรอยด์ให้คำนึงถึงทิศของพิกัดร่วมด้วย พื้นที่ A_1 อยู่ทางด้านลบ ดังนั้นพิกัดของ $\overline{X}_1$ ต้องมีค่าเป็นลบ การกำหนดทิศพิกัดของรูปทำได้ดังนี้



จุดเซนทรอยด์รูปเรขาคณิต

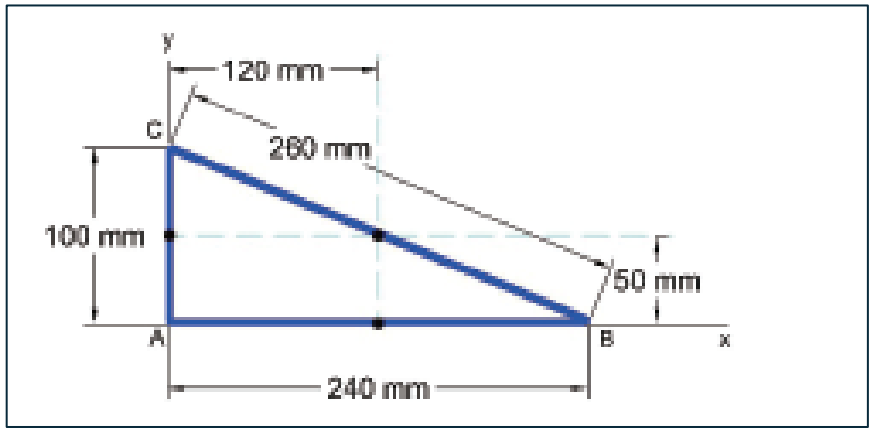
	$\bar{x}$	A	$\bar{x}$A
A_1 ครึ่งวงกลมทึบ	−	+	−
A_2 สี่เหลี่ยมทึบ	+	+	+
A_3 วงกลมกลวง	+	−	−

ตัวอย่าง



จากรูป จงคำนวณหาจุดศูนย์ถ่วง เมื่อลวดมีวามสม่ำเสมอ

วิธีทำ



รูปย่อย	ความยาว (mm)	$\bar{x}$ (mm)	$\bar{y}$ (mm)	$\bar{x}L$(mm²)	$\bar{y}L$(mm²)
AB	240	120	0	28.8×10^3	0
BC	260	120	50	31.2×10^3	13×10^3
CA	100	0	50	0	5×10^3
	$\Sigma L = 600$			$\Sigma\bar{x}L = 60 \times 10^3$	$\Sigma\bar{y}L = 18 \times 10^3$

$\bar{X}\Sigma L = \Sigma\bar{x}L$: $\bar{X}$ (600 mm^2) = 60 x $10^3 mm^2$ $\bar{X}$ = 100 mm

$\bar{Y}\Sigma L = \Sigma\bar{y}L$: $\bar{Y}$ (600 mm^2) = 18 x $10^3 mm^2$ $\bar{Y}$ = 30 mm