หน่วยการเรียนรู้ที่ 6

โมเมนต์ความเฉื่อย

สาระสำคัญ

โมเมนต์ความเฉื่อยเป็นการวัดค่าต้านทานการหมุนของวัตถุเทียบกับแกนหมุนนั้นๆ ซึ่งถ้าเทียบกับการเคลื่อนที่เชิงเส้นก็คล้ายกับค่ามวลของวัตถุนั่นเอง โมเมนต์ความเฉื่อยเป็นคุณสมบัติของวัตถุที่จะกำหนดค่าความต้านทานต่อการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเชิงมุมรอบแกนของการหมุนของมัน เป็นวิธีการหมุนของวัตถุอันเป็นผลมาจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ซึ่งระบุว่า “วัตถุทุกชนิดจะรักษาสภาพหยุดนิ่งหรือสภาพเคลื่อนที่อย่างสม่ำเสมอเป็นเส้นตรงนอกจากจะมีแรงลัพธ์ที่มีค่าไม่เป็นศูนย์มากระทำ” ในบรบทนี้ความเฉื่อย หมายถึง ความต้านทานต่อการเปลี่ยนแปลง

โมเมนต์ความเฉื่อยถูกนำไปใช้กับการขยายตัวของวัตถุซึ่งมวลเป็นข้อจำกัดในการหมุนรอบแกน เกิดขึ้นจากการรวมกันของมวลและเรขาคณิตในการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุอย่างต่อเนื่อง ส่วนประกอบของอนุภาค หรือที่รู้จักกันในชื่อว่า พลศสตร์ของวัตถุแข็งเกร็ง (Dynamics of Rigid Body) เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของขั้วเสาที่ดำเนินการโดยนักไต่ลวดสลิงที่ต่อต้านการหมุนและช่วยให้นักไต่ลวดรักษาความสมดุลไว้ได้

สาระการเรียนรู้

1. โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่
2. รัศมีไจเรชั่นของพื้นที่
3. ทฤษฎีแกนขนานของพื้นที่
4. โมเมนต์ความเฉื่อยของรูปเรขาคณิต

สมรรถนะประจำหน่วย

1. แสดงความรู้เกี่ยวกับโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปทรงต่างๆ
2. คำนวณโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปทรงต่างๆ

จุดประสงค์การเรียนรู้

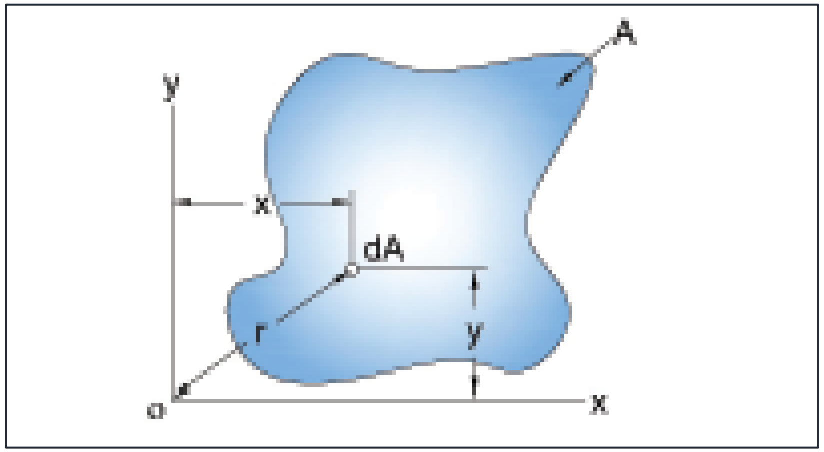
1. คำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ได้
2. คำนวณหารัศมีไจเรชั่นของพื้นที่ได้
3. คำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่โดยใช้ทฤษฎีแกนขนานได้
4. คำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยของรูปเรขาคณิตได้

โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่

โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ย่อย dA ตามแนวแกน x และ y คือ $dI_x = y^2 dA$ และ $dI_y = x^2 dA$ ตามลำดับ แสดงดังรูป คำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ A โดยการอินทิเกรท ได้ดังนี้

$$I_x = \int y^2 dA \qquad (ก)$$

$$I_y = \int x^2 dA$$



โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ย่อย dA

โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่

สามารถคำนวณโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ย่อย dA รอบจุดกำเนิดหรือแนวแกน z ซึ่งเรียกว่า โมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้ว นั่นคือ $dJ_0 = r_2 dA$ เมื่อ r คือ ระยะตั้งฉากจากจุดกำเนิดไปยังพื้นที่ย่อย dA คำนวณได้ ดังนี้

$$J_0 = \int r^2\, dA = \int (x^2 + y^2)\, dA = \int y^2\, dA + \int x^2 dA$$

$$J_0 = I_x + I_y \qquad \text{(ข)}$$

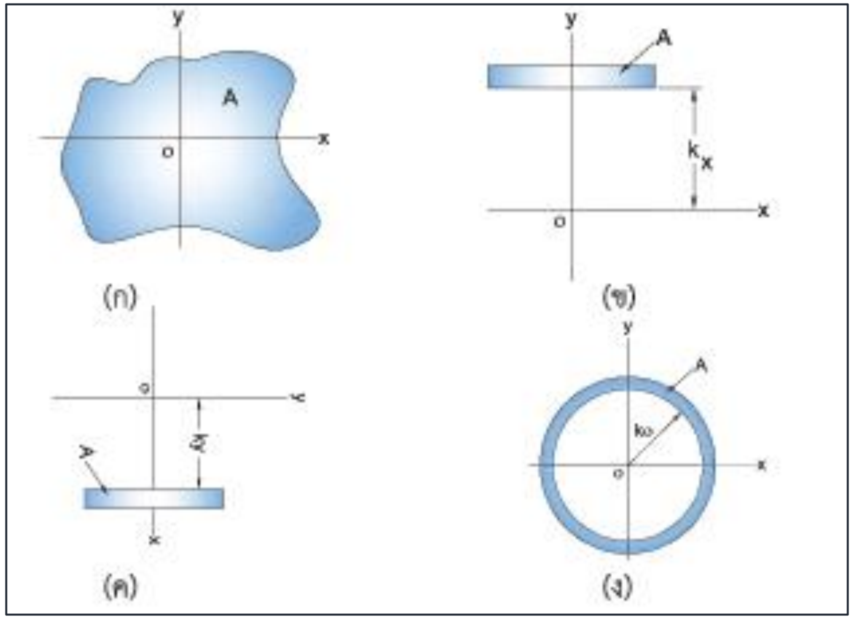
เมื่อ $r^2 = x^2 + y^2$

จากสมการข้างต้นพบว่า I_x I_y และ J_0 จะต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ เนื่องจากเป็นการคูณกันของระยะทางยกกำลังสองกับพื้นที่ และหน่วยของโมเมนต์ความเฉื่อยคือ หน่วยของความยาวกำลังสี่ เช่น m^4 หรือ mm^4

รัศมีไจเรชั่นของพื้นที่

จากรูป (ก) โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ A รอบแกน x มีค่าเท่ากับ I_x ถ้าบีบพื้นที่ให้เป็นแถบบางขนานกับแกน x ดังรูป (ข) แถบบางนี้มีระยะห่างจากแกน x เท่ากับ k_x ดังนั้นโมเมนต์ความเฉื่อยเท่ากับ

$$I_x = x_x^2 A \qquad \text{(ก)}$$



นั่นคือ

$$k_x = \sqrt{\frac{I_2}{A}} \qquad \text{(ข)}$$

รัศมีไจเรชั่นของพื้นที่

เมื่อ k_x เรียกว่า รัศมีไจเรชั่นของพื้นที่ตามแนวแกน x เช่นเดียวกับ k_y และ k_0 ได้ว่า

$$I_y = x_x^2 A \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad (ค)$$

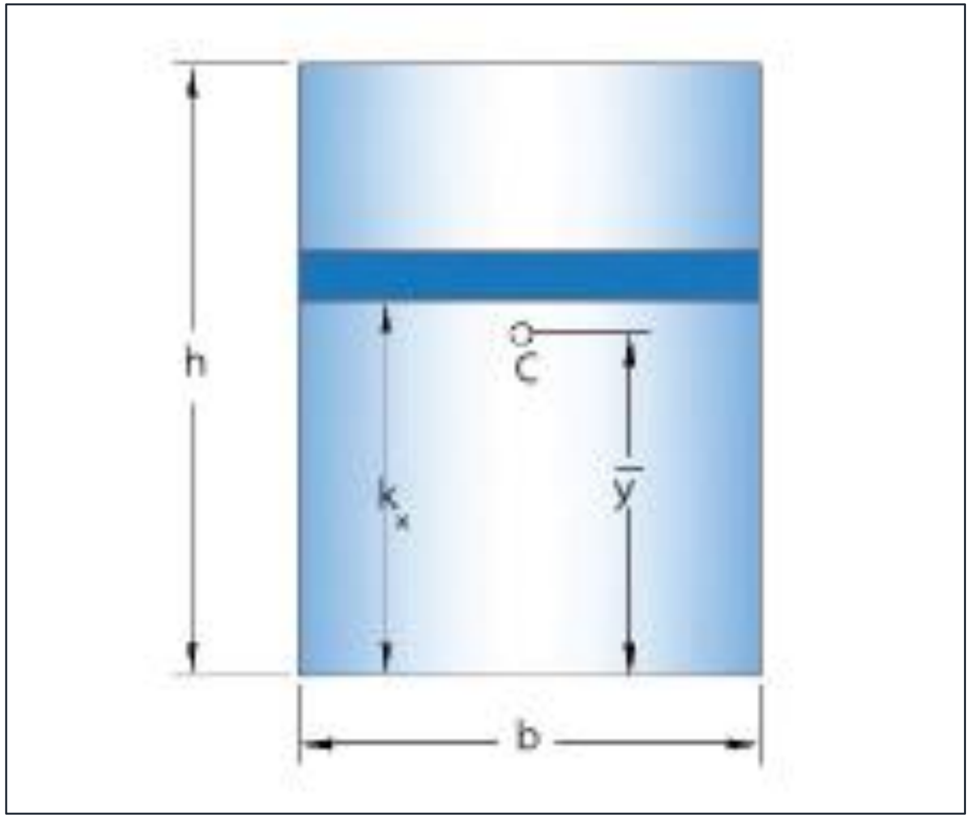
$$J_0 = x_x^2 A \qquad k_0 = \sqrt{\frac{I_0}{A}} \qquad (ง)$$

เมื่อสมการ (ข) เมื่อแทนด้วยค่ารัศมีไจเรชั่น จะได้ว่า

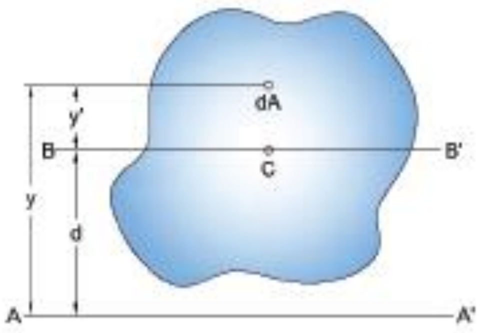
$$x_x^2 A = k_x^2 + k_y^2 \qquad (จ)$$

รัศมีไจเรชั่นของพื้นที่

ดังตัวอย่างในรูป คำนวณหารัศมีไจเรชั่น k_x ตามแนวแกนฐานของรูปได้ดังนี้



ทฤษฎีแกนขนานของพื้นที่



*โมเมนต์ความเฉื่อยแกน*AA′

โมเมนต์ความเฉื่อย I ของพื้นที่ A ตามแนวแกน AA′ เท่ากับ y ดังรูป เขียนได้ดังนี้

$$I = \int y^2 \, dA$$

แกนBB′ที่ลากผ่านจุดเซนทรอยด์ C ขนานกับแกน AA′เรียกว่า แกนศูนย์ถ่วง (Centroidal Axis) มีระยะห่างจาก dA ถึง BB′เท่ากับ y′ได้ว่า y=y′+d เมื่อ d คือ ระยะห่างระหว่าง แกน AA′ กับแกน BB′ดังนั้น

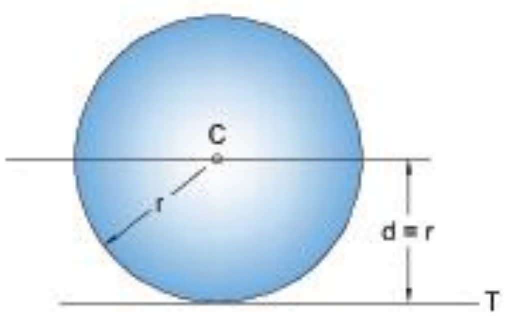
$$I = \int y^2 \, dA = \int (y'+d^2) \, dA$$

$$= \int y'^2 \, dA = 2d \int y' \, dA + d^2 \int y' \, dA$$

ได้ว่า $I = \bar{I} + Ad^2$

โดยที่ I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ใดๆ ตามแนวแกน AA′ ซึ่งมีค่าเท่ากับโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ $\bar{I}$ ตามแนวแกนของจุดเซนทรอยด์ (แกนBB′) ที่ขนานกันกับแกน AA′ รวมกับผลคูณของพื้นที่กับค่ายกกำลังสองของระยะ d

ตัวอย่าง



จงหาโมเมนต์ความเฉื่อย I_T ของรูปวงกลมโดยใช้หลักการทฤษฎีแกนขนาน

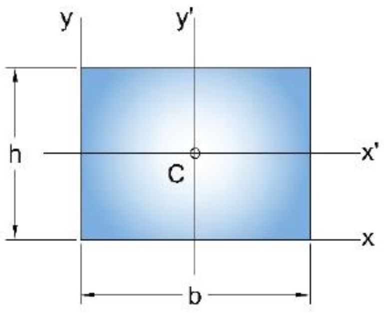
วิธีทำ

$$I_T = \overline{I} + Ad^2 = \frac{1}{4}\pi r^4 + (\pi r^4)\, r^2 = \frac{5}{4}\pi r^4$$

โมเมนต์ความเฉื่อยของรูปเรขาคณิต

รูปประกอบ A อาจประกอบไปด้วยรูปทรงพื้นฐานหลายรูปด้วยกัน ($A_1, A_2, A_3, \ldots$) การคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยของรูปประกอบ A ทำได้โดยหาโมเมนต์ความเฉื่อยของรูปย่อยแต่ละรูปแล้วนำมารวมกัน โดยอาจมีการใช้หลักการทฤษฎีแกนขนานเมื่อแกนของโมเมนต์ไม่ได้อยู่ในแนวเดียวกัน โมเมนต์ของพื้นที่รูปพื้นฐาน แสดงดังรูป

Rectangle



$$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$$

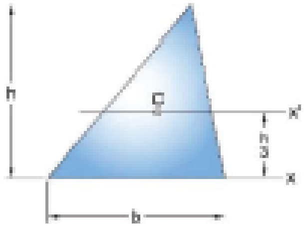
$$\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3$$

$$\bar{I}_{x} = \frac{1}{3}bh^3$$

$$\bar{I}_{y} = \frac{1}{3}b^3h$$

$$J_c = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$$

Triangle

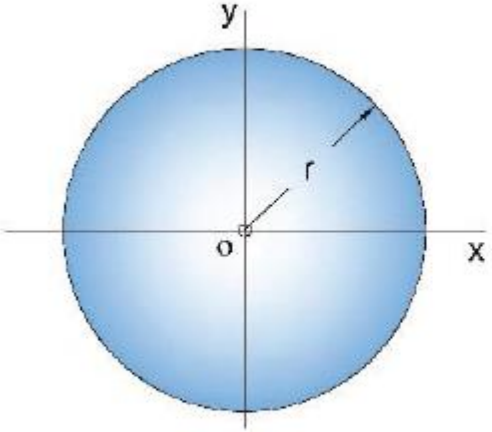


$$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$$

$$I_{x} = \frac{1}{12}bh^3$$

โมเมนต์ความเฉื่อยของรูปเรขาคณิต

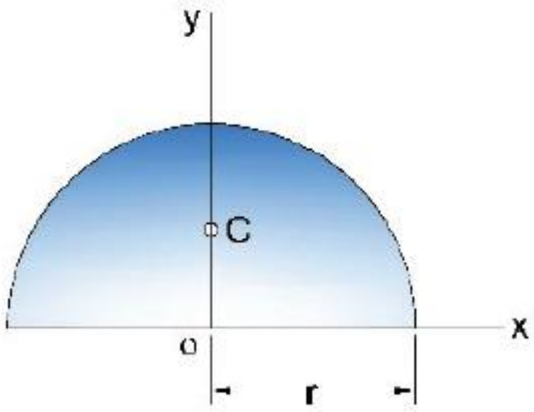
Circle



$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$$

$$J_o = \frac{1}{2}\pi r^4$$

Semicircle

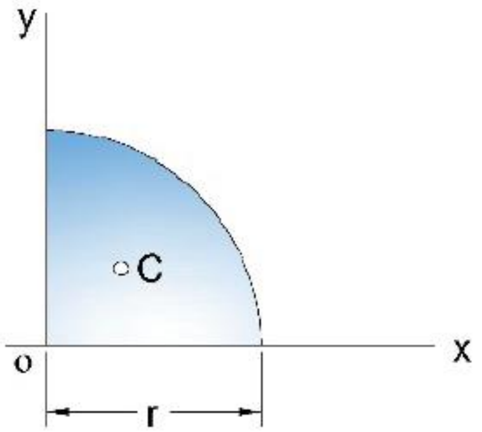


$$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$$

$$J_o = \frac{1}{4}\pi r^4$$

โมเมนต์ความเฉื่อยของรูปเรขาคณิต

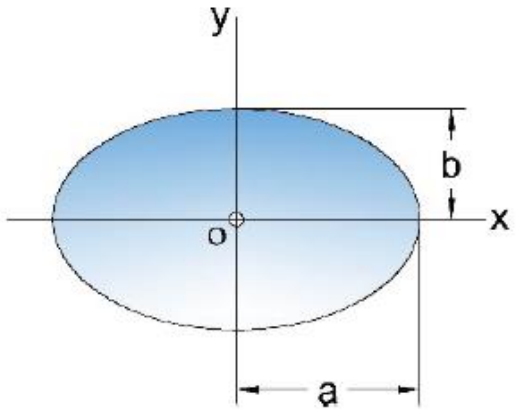
Quarter circle



$$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$$

$$J_o = \frac{1}{8}\pi r^4$$

Ellipse

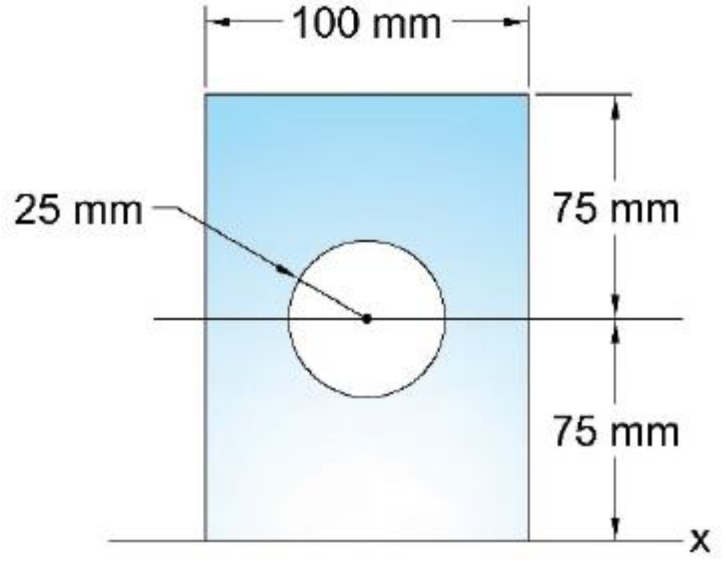


$$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$$

$$\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3 b$$

$$J_o = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$$

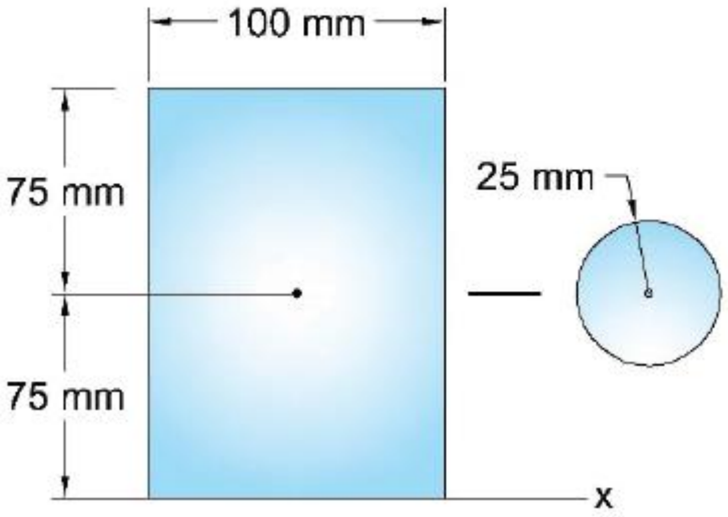
ตัวอย่าง



จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ที่แรเงาตามแนวแกน x

วิธีทำ

จากรูปโจทย์ คือ รูปสี่เหลี่ยมตัดออกด้วยรูปวงกลม ดังนี้



ใช้ทฤษฎีแกนขนาน โมเมนต์ความเฉื่อยในแนวแกน x ของรูปวงกลมและรูปสี่เหลี่ยม คือ $I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$ และ $I_x = \frac{1}{12} b n^3$ ตามลำดับ

รูปวงกลม

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ab^2$$

$$= \frac{1}{4}\pi(25)^4 + \pi(25)^2(75)^2$$

$$= 11.4 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

รูปสี่เหลี่ยม

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ab^2$$

$$= \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2$$

$$= 112.5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

ดังนั้น

$$I_x = -11.4\text{x}10^6 + 112.5 \times 10^6$$

$$= 101 \times 10^6 \text{ mm}^4$$