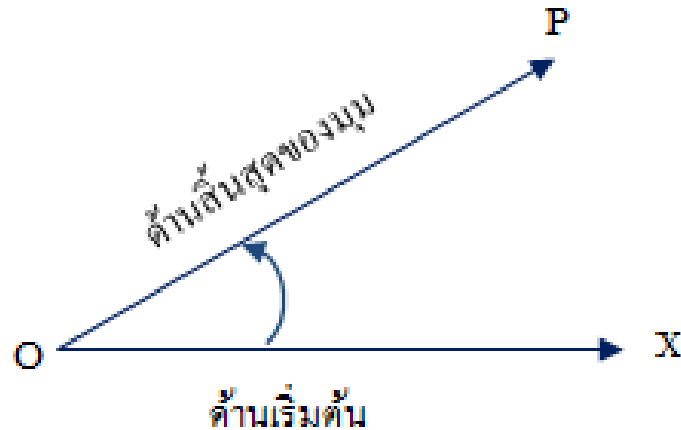


หน่วยที่ 1

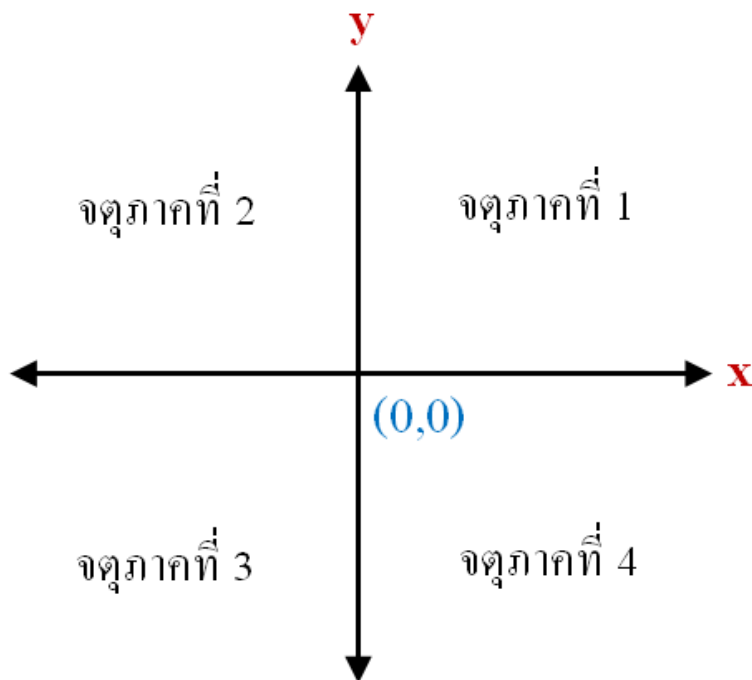
มูมและหน่วยการวัดมูม

มุม



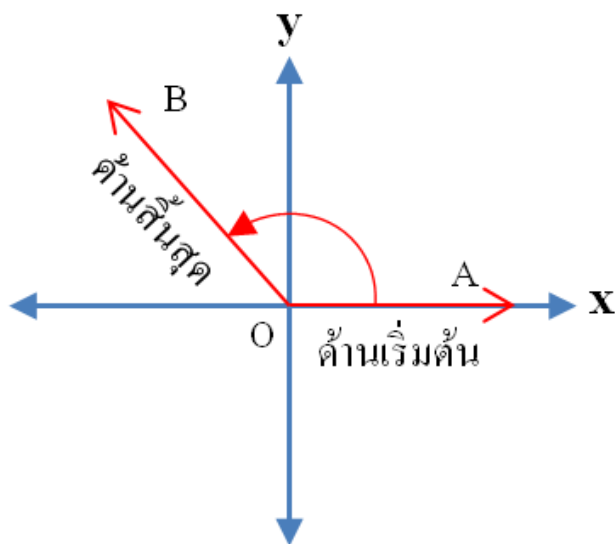
พิจารณาจากรูป มุม POX เกิดจากการหมุนของสองรังสีที่มีจุดเริ่มต้นร่วมกัน
ด้าน OX เรียกว่า ด้านเริ่มต้น (Initial Side)
ด้าน OP เรียกว่า ด้านสิ้นสุด (Terminal Side)
จุด O เรียกว่า จุดมุม หรือจุดยอด (Vertex)

ระนาบพิกัดฉาก

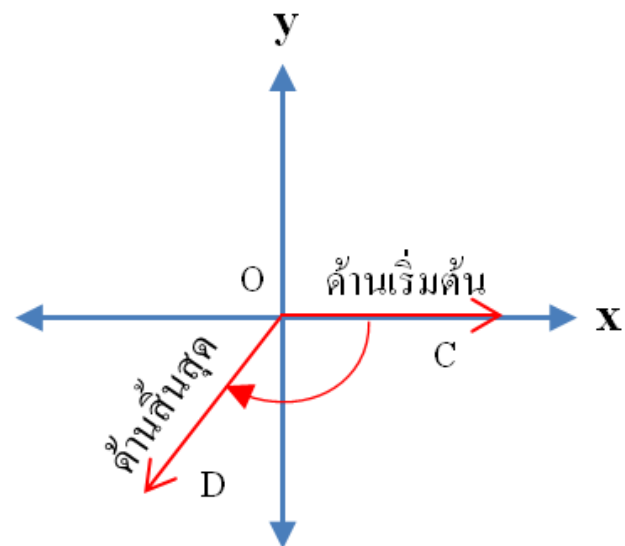


ระนาบพิกัดฉาก เป็นบริเวณที่เกิดจาก แกน x ตัดแกน y เป็นมุมฉากที่จุดๆหนึ่ง เรียกว่า จุดกำเนิด (Origin) ทำให้แบ่งพิกัดฉากออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า จตุภาค หรือ ควอดรนต์ (Quadrant) สำหรับด้านเริ่มต้นของมุมจะอยู่บนแกน x ทางด้านบวก ส่วนด้านสิ้นสุดของมุมจะอยู่ในจตุภาคใด ขึ้นอยู่กับขนาดและทิศทางของการหมุนของมุม

มุมในตำแหน่งมาตรฐาน



มุม AOB มีเครื่องหมายเป็นบวก



มุม COD มีเครื่องหมายเป็นลบ

หน่วยของการวัดมุม

1. การวัดมุมหน่วยเป็นองศา (degree)

หน่วยของมุมเป็นองศา ยังแบ่งหน่วยย่อยเป็นลิปดา และฟิลิปดา กล่าวคือ ในแต่ละ 1 องศา (1°) จะแบ่งเป็นหน่วยย่อย คือ 60 ลิปดา ($60'$) และในแต่ละลิปดา จะแบ่งเป็นหน่วยย่อย คือ 60 ฟิลิปดา ($60''$)

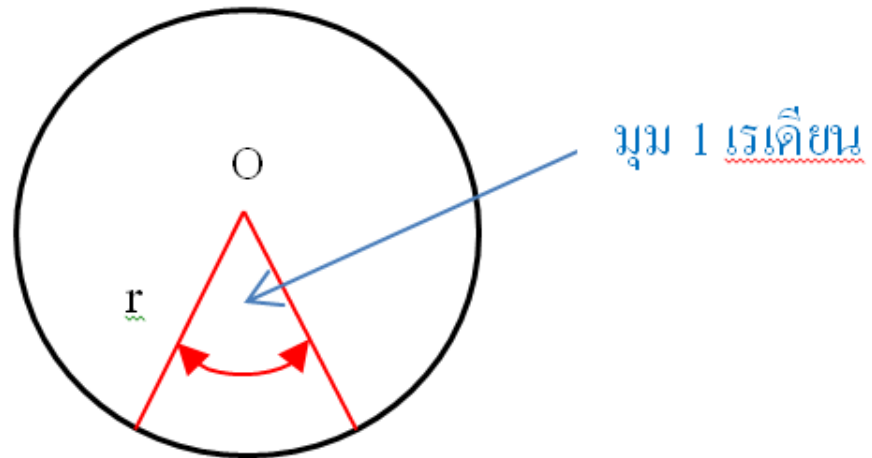
ดังนั้น	1 องศา	เท่ากับ	60	ลิปดา
	1 ลิปดา	เท่ากับ	60	ฟิลิปดา
	1 องศา	เท่ากับ	3,600	ฟิลิปดา

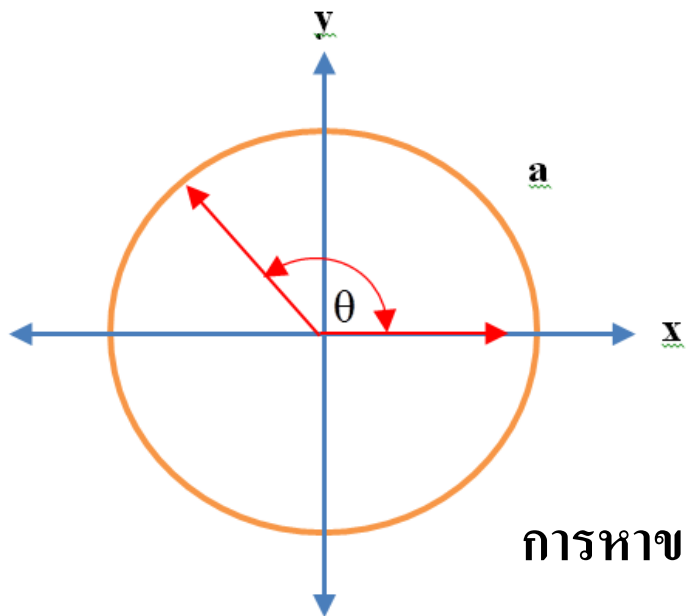
ตัวอย่างที่ 1 จงเปลี่ยนมุม $20^{\circ}10'15''$ ให้อยู่ในมุมหน่วยขององศา

วิธีทำ	10 ลิปดา	=	$\frac{1 \times 10}{60}$	องศา
		$\approx$	0.1667	องศา
	15 พีลิปดา	=	$\frac{1 \times 15}{3,600}$	องศา
		$\approx$	0.0042	องศา
	ดังนั้น $20^{\circ}10'15''$	$\approx$	$20^{\circ} + 0.1667^{\circ} + 0.0042^{\circ}$	
		$\approx$	20.1709°	

2. การวัดมุมหน่วยเป็นเรเดียน (radian)

มุม 1 เรเดียน คือมุมที่มีขนาด
เท่ากับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่
รองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาวเท่ากับรัศมี





จากรูป

θ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

a แทนความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม

r แทนรัศมีของวงกลม

การหาขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

มุม θ มีขนาด

$$= \frac{a}{r} \quad \text{เรเดียน}$$

มุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลม

$$= \frac{\text{ความยาวเส้นรอบวงของรัศมี}}{\text{รัศมี}}$$

$$= \frac{2\pi r}{r}$$

$$= 2\pi \quad \text{เรเดียน}$$

และมุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลม เท่ากับ 360 องศา

$$360 \text{ องศา} = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

$$180 \text{ องศา} = \pi \text{ เรเดียน}$$

$$1 \text{ องศา} = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน}$$

$$\approx 0.0175 \text{ เรเดียน}$$

$$1 \text{ เรเดียน} = \frac{180}{\pi} \text{ องศา}$$

$$\approx 57.3 \text{ องศา}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงเปลี่ยนมุม 30 องศา ให้อยู่ในหน่วยของเรเดียน

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก มุม } 1 \text{ องศา} &= \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน} \\ \text{มุม } 30 \text{ องศา} &= \frac{\pi}{180} \times 30 \text{ เรเดียน} \\ &= \frac{\pi}{6} \text{ เรเดียน}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงเปลี่ยนมุม 315 องศา ให้อยู่ในหน่วยของเรเดียน

วิธีทำ	เนื่องจาก มุม 1 องศา	=	$\frac{\pi}{180}$	เรเดียน
	มุม 315 องศา	=	$\frac{\pi}{180} \times 315$	เรเดียน
		=	$\frac{7\pi}{4}$	เรเดียน

ตัวอย่างที่ 4 จงเปลี่ยนมุม $\frac{\pi}{5}$ เรเดียน ให้อยู่ในหน่วยขององศา

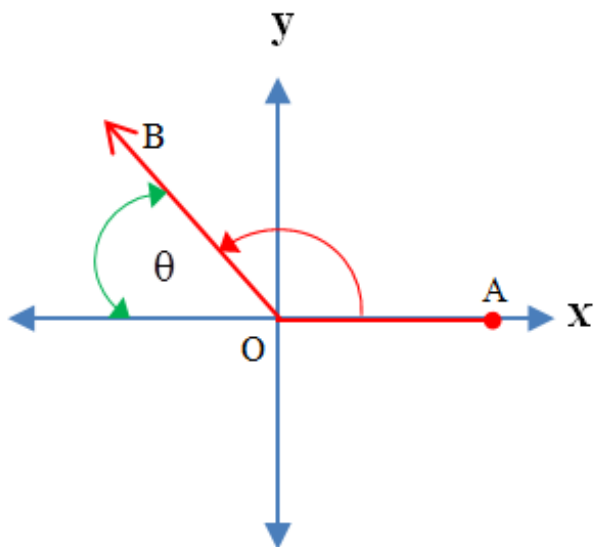
วิธีทำ เนื่องจาก มุม 1 เรเดียน = $\frac{180}{\pi}$ องศา

 มุม $\frac{\pi}{5}$ เรเดียน = $\frac{180}{\pi} \times \frac{\pi}{5}$ องศา

 = 36 องศา

ตัวอย่างที่ 5 จงเปลี่ยนมุม $\frac{7\pi}{6}$ เรเดียน ให้อยู่ในหน่วยขององศา

วิธีทำ	เนื่องจาก มุม 1 เรเดียน	=	$\frac{180}{\pi}$	องศา
	มุม $\frac{7\pi}{6}$ เรเดียน	=	$\frac{180}{\pi} \times \frac{7\pi}{6}$	องศา
		=	210	องศา



จากรูป มุม AOB เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน

O เป็นจุดยอดมุม

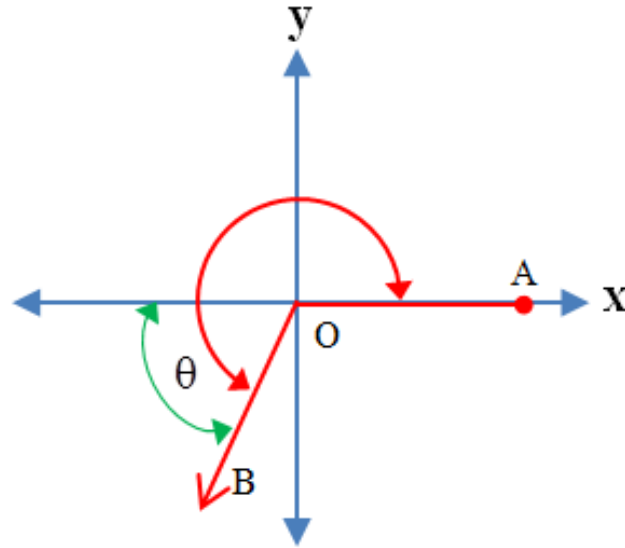
OA เป็นด้านเริ่มต้น

OB เป็นด้านสิ้นสุด อยู่ในจตุภาคที่ 2

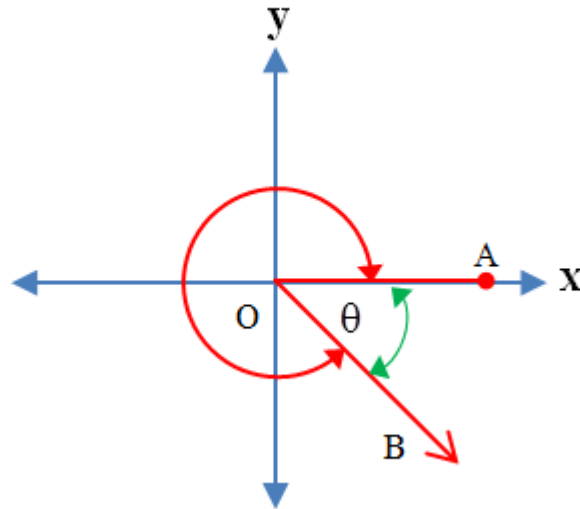
θ เป็นมุมแหลม และเป็นมุมที่อยู่ระหว่าง
ด้านสิ้นสุดของมุม AOB กับแกน x

ขนาดของมุม AOB มากกว่า 90 องศา และ
น้อยกว่า 180 องศา หรือ π เรเดียน

ดังนั้นมุม AOB เท่ากับ $180^\circ - \theta$ หรือ $\pi - \theta$



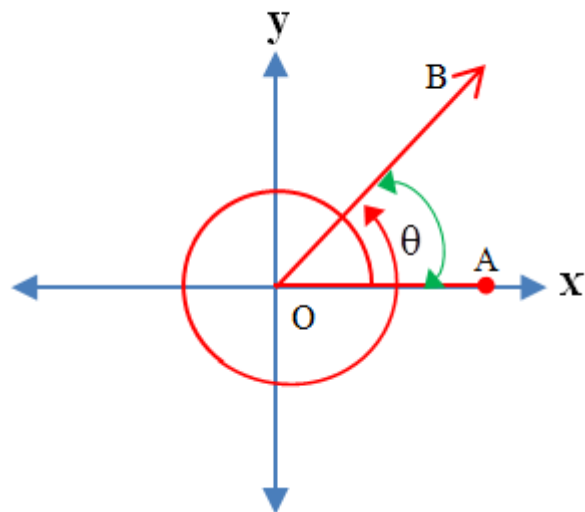
จากรูป มุม OB เป็นด้านสิ้นสุดมุม AOB อยู่ในจตุภาคที่ 3
ขนาดของมุม AOB มากกว่า 180 องศา หรือ π เรเดียน
ดังนั้นมุม AOB เท่ากับ $180^\circ + \theta$ หรือ $\pi + \theta$



จากรูป มุม OB เป็นด้านสิ้นสุดมุม AOB อยู่ในจตุภาคที่ 4

ขนาดของมุม AOB มากกว่า 270 องศา และน้อยกว่า 360 องศา
หรือ 2π เรเดียน

ดังนั้นมุม AOB เท่ากับ $360^\circ - \theta$ หรือ $2\pi - \theta$



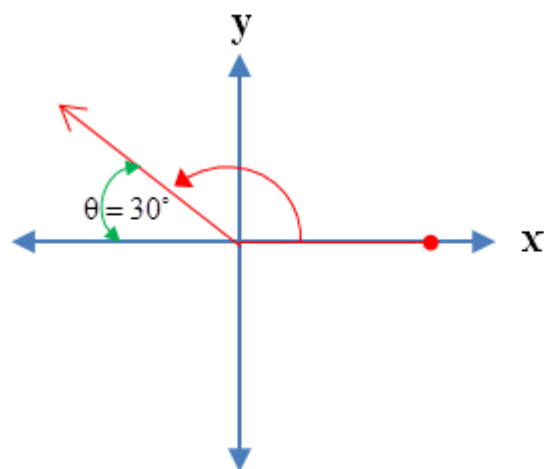
จากรูป มุม OB เป็นด้านสิ้นสุดมุม AOB อยู่ในจตุภาคที่ 1

ขนาดของมุม AOB มากกว่า 360 องศา หรือ 2π เรเดียน

ดังนั้นมุม AOB เท่ากับ $360^\circ + \theta$ หรือ $2\pi + \theta$

ตัวอย่างที่ 6 มุมที่กำหนดต่อไปนี้อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน คำนวณเส้นสุดของมุมอยู่ในจตุภาคใด

1) มุม 150 องศา

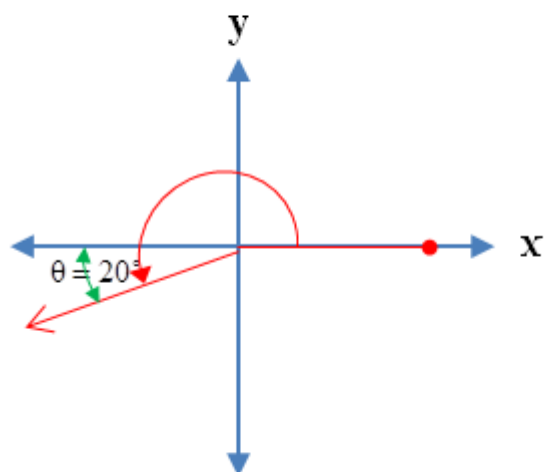


$$\text{วิธีทำ} \quad 150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$$

$$\text{และ } \theta = 30^\circ$$

คำนวณเส้นสุดของมุม 150 องศา อยู่ในจตุภาคที่ 2

2) มุม 200 องศา

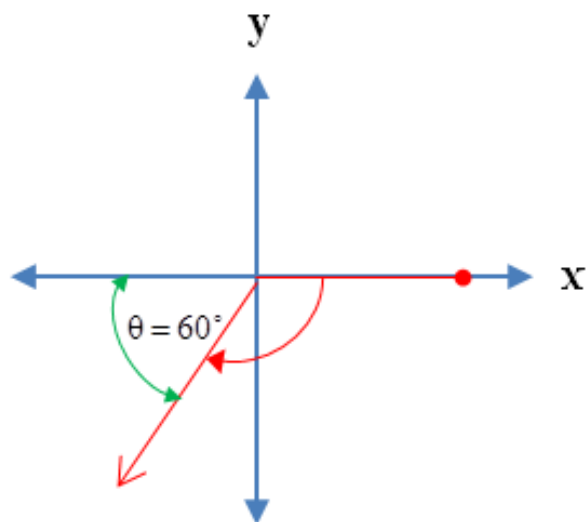


วิธีทำ $200^\circ = 180^\circ + 20^\circ$

และ $\theta = 20^\circ$

ค่าเส้นสัมผัสของมุม 200 องศา อยู่ในจุดภาคที่ 3

3) มุม -120 องศา

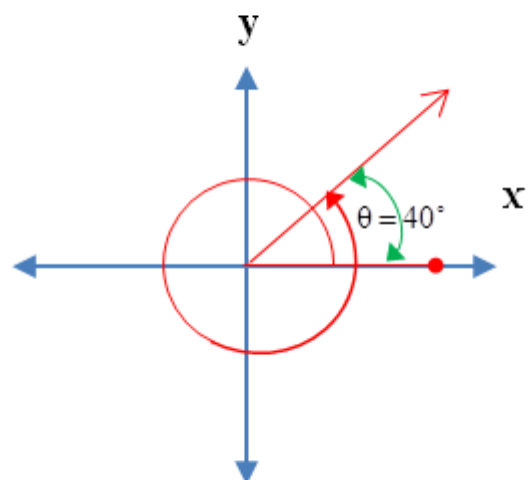


วิธีทำ $-120^\circ = -(180^\circ - 60^\circ)$

และ $\theta = 60^\circ$

ตำแหน่งสิ้นสุดของมุม -120 องศา อยู่ในจตุภาคที่ 3

4) มุม 400 องศา



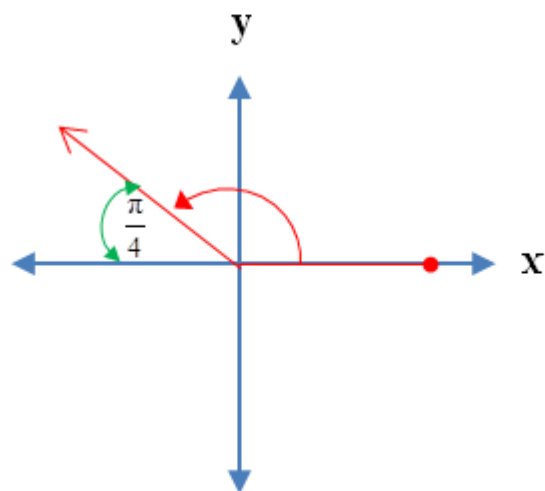
วิธีทำ $400^\circ = 360^\circ + 40^\circ$

และ $\theta = 40^\circ$

ดังนั้นจุดของมุม 400 องศา อยู่ในจุดภาคที่ 1

ตัวอย่างที่ 7 มุมที่กำหนดต่อไปนี้อยู่ในตำแหน่ง ด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในจตุภาคใด

1) มุม $\frac{3\pi}{4}$ เรเดียน

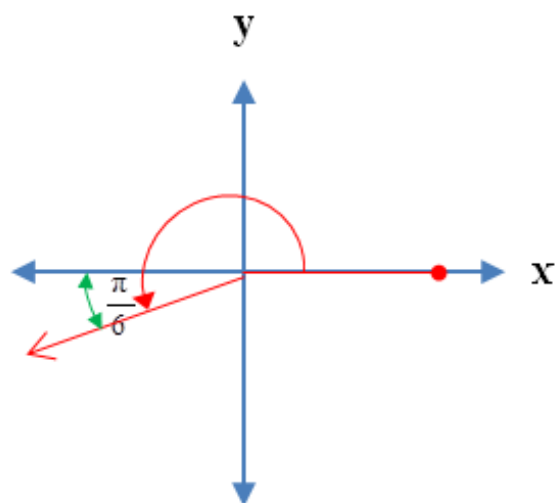


วิธีทำ $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$

และ $\theta = \frac{\pi}{4}$

ด้านสิ้นสุดของมุม $\frac{3\pi}{4}$ เรเดียน อยู่ในจตุภาคที่ 2

2) มุม $\frac{7\pi}{6}$ เรเดียน

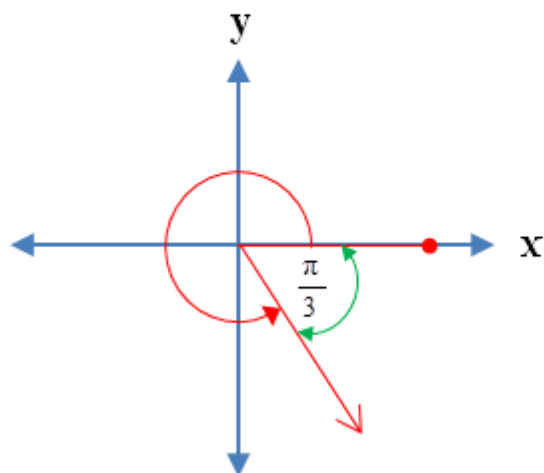


วิธีทำ $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$

และ $\theta = \frac{\pi}{6}$

ด้านสิ้นสุดของมุม $\frac{7\pi}{6}$ เรเดียน อยู่ในจตุภาคที่ 3

3) มุม $\frac{5\pi}{3}$ เรเดียน



วิธีทำ $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

และ $\theta = \frac{\pi}{3}$

ค่าสิ้นสุดของมุม $\frac{5\pi}{3}$ เรเดียน อยู่ในจุดภาคที่ 4

นักเรียนลองทำแบบฝึกหัดกันเพื่อเพิ่ม
ความเข้าใจกันด้วยนะ

