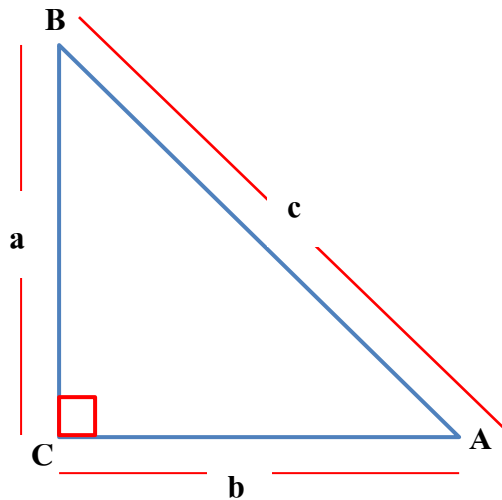


## ใบความรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตรีโกณมิติ (Trigonometry) เป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความยาวและมุมของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและมุมระหว่างด้านมีความสัมพันธ์ที่คงที่ ถ้าทราบความยาวอย่างน้อยหนึ่งด้านและค่าของมุมหนึ่งมุม แล้วมุมและความยาวอื่นๆ ที่เหลือก็สามารถคำนวณหาค่าได้

ก่อนที่จะได้ศึกษาเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ควรจะได้ทราบ ความสัมพันธ์ระหว่างด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนี้



จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มุม C เป็นมุมฉาก มุม A และมุม B เป็นมุมแหลม

กำหนดให้ a เป็นความยาวด้าน BC ซึ่งเป็นด้านตรงข้ามมุม A

b เป็นความยาวด้าน AC ซึ่งเป็นด้านตรงข้ามมุม B

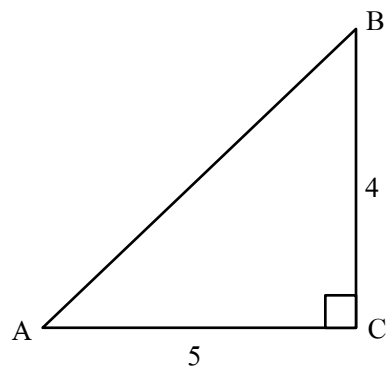
และ c เป็นความยาวด้าน AB ซึ่งเป็นด้านตรงข้ามมุม C หรือตรงข้ามมุมฉาก

ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างความยาวทั้ง 3 ด้าน ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เป็นไปตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagorean theorem) ดังนี้

$$c^2 = a^2 + b^2$$

จากทฤษฎีพีทาโกรัส หากเราทราบความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองด้าน จะสามารถหาความยาวด้านที่ 3 ได้

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC จงหาความยาวด้าน AB



วิธีทำ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

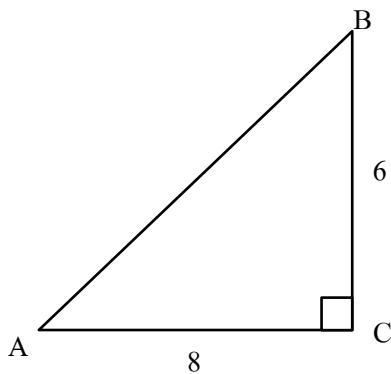
$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ &= 5^2 + 4^2 \\ &= 25 + 16 \\ &= 41 \\ AB &= \sqrt{41} \\ &= 6.40 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความยาวด้าน AB เท่ากับ 6.40 หน่วย



ตัวอย่างที่ 2 กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มุม C เป็นมุมฉาก ด้าน AC ยาว 8 หน่วย  
 ด้าน BC ยาว 6 หน่วย จงหา อัตราส่วนตรีโกณมิติทั้งหมดของมุม A

วิธีทำ



ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ทฤษฎีพีทาโกรัส

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\
 &= 8^2 + 6^2 \\
 &= 64 + 36 \\
 &= 100 \\
 AB &= \sqrt{100} \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

ที่มุม A

$$\sin A = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\cos A = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$\tan A = \frac{6}{8} = 0.75$$

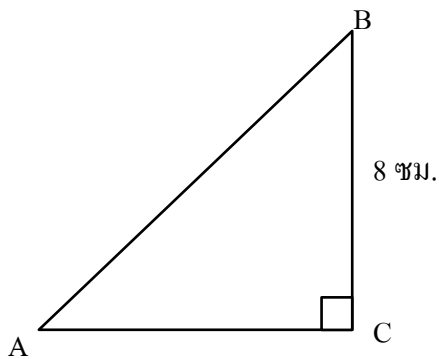
$$\operatorname{cosec} A = \frac{10}{6} = 1.67$$

$$\sec A = \frac{10}{8} = 1.25$$

$$\cot A = \frac{8}{6} = 1.33$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด PQR เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป โดยที่  $\sin P = \frac{2}{3}$  และด้าน RQ ยาว 8 เซนติเมตร

จงหา  $\cos P$ ,  $\tan P$  และ  $\sin R$



วิธีทำ จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก PQR

$$\sin P = \frac{RQ}{PR}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{PR}$$

$$PR = \frac{3 \times 8}{2}$$

$$PR = 12 \text{ เซนติเมตร}$$

จากทฤษฎีพีทาโกรัส

$$PR^2 = PQ^2 + RQ^2$$

$$PQ^2 = PR^2 - RQ^2$$

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{12^2 - 8^2} \\ &= \sqrt{80} \approx 8.94 \end{aligned}$$

$$\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{8.94}{12} = 0.745$$

$$\tan P = \frac{RQ}{PQ} = \frac{8}{8.94} \approx 0.8949$$

$$\sin R = \frac{PQ}{PR} = \frac{8.94}{12} = 0.745$$

การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30 องศา 45 องศา และ 60 องศา

ฟังก์ชัน \ มุม	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
cosec	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
sec	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ  $(\sin 45^\circ \times \sec 45^\circ) + (\tan 60^\circ \times \cos 30^\circ)$

วิธีทำ 
$$(\sin 45^\circ \times \sec 45^\circ) + (\tan 60^\circ \times \cos 30^\circ) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 1 + \frac{3}{2}$$

$$(\sin 45^\circ \times \sec 45^\circ) + (\tan 60^\circ \times \cos 30^\circ) = \frac{5}{2}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่า x จากสมการ

$$x \operatorname{cosec} 30^\circ + \sin 60^\circ \cot 30^\circ = \cos 60^\circ$$

วิธีทำ จากสมการ  $x \operatorname{cosec} 30^\circ + \sin 60^\circ \cot 30^\circ = \cos 60^\circ$

แทนค่า 
$$x(2) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}$$

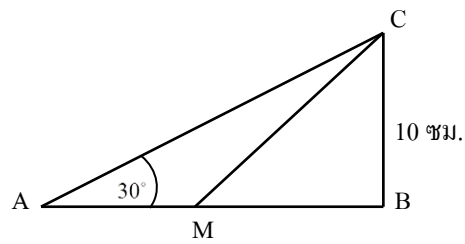
$$2x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

ตัวอย่างที่ 6 จากรูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม ABC เป็นมุมฉาก มุม BAC เท่ากับ 30 องศา ด้าน BC ยาว 10 เซนติเมตร และ M เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB จงหาระยะ AM



วิธีทำ จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{10}{AB}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{10}{AB}$$

$$AB = 10\sqrt{3}$$

แต่ M เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

$$AM = \frac{1}{2} \times 10 \times \sqrt{3}$$

$$= 5\sqrt{3}$$

$$\text{ดังนั้น } AM = 8.66 \text{ เซนติเมตร}$$

## การหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยใช้ตารางค่าตรีโกณมิติ

การใช้ตารางค่าตรีโกณมิติ หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมตั้งแต่ 0 องศา ถึงมุม 90 องศา หรือมุมตั้งแต่ 0 เรเดียน ถึง 1.5708 เรเดียน มีวิธีอ่านค่าจากตารางตรีโกณมิติ ดังนี้

1. การอ่านค่าตรีโกณมิติของมุมที่น้อยกว่า 45 องศา หรือ 0.7854 เรเดียน ให้อ่านค่ามุมจากคอลัมน์ซ้ายสุดของตาราง อ่านค่าตรีโกณมิติจากบรรทัดบนสุดของตาราง
2. การอ่านค่าตรีโกณมิติของมุมที่มากกว่า 45 องศา ให้อ่านค่ามุมจากคอลัมน์ขวาสุดของตาราง อ่านค่าตรีโกณมิติจากบรรทัดล่างสุดของตาราง

เรเดียน	องศา	Sin	Cos	Tan	Csc	Sec	Cot		
.0000	00	.0000	1.0000	.0000	----	1.0000	----	90	1.5707
.0175	01	.0175	.9998	.0175	57.2987	1.0002	57.2900	89	1.5533
.0349	02	.0349	.9994	.0349	28.6537	1.0006	28.6363	88	1.5359
.0524	03	.0523	.9986	.0524	19.1073	1.0014	19.0811	87	1.5184
.0698	04	.0698	.9976	.0699	14.3356	1.0024	14.3007	86	1.5010
.0873	05	.0872	.9962	.0875	11.4737	1.0038	11.4301	85	1.4835
.1047	06	.1045	.9945	.1051	9.5668	1.0055	9.5144	84	1.4661
.1222	07	.1219	.9925	.1228	8.2055	1.0075	8.1443	83	1.4486
.1396	08	.1392	.9903	.1405	7.1853	1.0098	7.1154	82	1.4312
.1571	09	.1564	.9877	.1584	6.3925	1.0125	6.3138	81	1.4137
.1745	10	.1736	.9848	.1763	5.7588	1.0154	5.6713	80	1.3953
.1920	11	.1908	.9816	.1944	5.2408	1.0187	5.1446	79	1.3788
.2094	12	.2079	.9781	.2126	4.8097	1.0223	4.7046	78	1.3614
.2269	13	.2250	.9744	.2309	4.4454	1.0263	4.3315	77	1.3439
.2443	14	.2419	.9703	.2493	4.1336	1.0306	4.0108	76	1.3265
.2618	15	.2588	.9659	.2679	3.8637	1.0353	3.7321	75	1.3090
.2793	16	.2756	.9613	.2867	3.6280	1.0403	3.4874	74	1.2915
.2967	17	.2924	.9563	.3057	3.4203	1.0457	3.2709	73	1.2741
.3142	18	.3090	.9511	.3249	3.2361	1.0515	3.0777	72	1.2566
.3316	19	.3256	.9455	.3443	3.0716	1.0576	2.9042	71	1.2392
.3491	20	.3420	.9397	.3640	2.9238	1.0642	2.7475	70	1.2217
.3665	21	.3584	.9336	.3839	2.7904	1.0711	2.6051	69	1.2043
.3840	22	.3746	.9272	.4040	2.6695	1.0785	2.4751	68	1.1868
.4014	23	.3907	.9205	.4245	2.5593	1.0864	2.3559	67	1.1694
.4189	24	.4067	.9135	.4452	2.4586	1.0946	2.2460	66	1.1519
.4363	25	.4226	.9063	.4663	2.3662	1.1034	2.1445	65	1.1345
.4538	26	.4384	.8988	.4877	2.2812	1.1126	2.0503	64	1.1170
.4712	27	.4540	.8910	.5095	2.2027	1.1223	1.9626	63	1.0996
.4887	28	.4695	.8829	.5317	2.1301	1.1326	1.8807	62	1.0821
.5061	29	.4848	.8746	.5543	2.0627	1.1434	1.8040	61	1.0647
.5236	30	.5000	.8660	.5774	2.0000	1.1547	1.7321	60	1.0472
.5411	31	.5150	.8572	.6009	1.9416	1.1666	1.6643	59	1.0297
.5585	32	.5299	.8480	.6249	1.8871	1.1792	1.6003	58	1.0123
.5760	33	.5446	.8387	.6494	1.8361	1.1924	1.5399	57	.9948
.5934	34	.5592	.8290	.6745	1.7883	1.2062	1.4826	56	.9774
.6109	35	.5736	.8192	.7002	1.7434	1.2208	1.4281	55	.9599
.6283	36	.5878	.8090	.7265	1.7013	1.2361	1.3764	54	.9425
.6458	37	.6018	.7986	.7536	1.6616	1.2521	1.3270	53	.9250
.6632	38	.6157	.7880	.7813	1.6243	1.2690	1.2799	52	.9076
.6807	39	.6293	.7771	.8098	1.5890	1.2868	1.2349	51	.8901
.6981	40	.6428	.7660	.8391	1.5557	1.3054	1.1918	50	.8727
.7156	41	.6561	.7547	.8693	1.5243	1.3250	1.1504	49	.8552
.7330	42	.6691	.7431	.9004	1.4945	1.3456	1.1106	48	.8378
.7505	43	.6820	.7314	.9325	1.4663	1.3673	1.0724	47	.8203
.7679	44	.6947	.7193	.9657	1.4396	1.3902	1.0355	46	.8029
.7854	45	.7071	.7071	1.0000	1.4142	1.4142	1.0000	45	.7854
		Cos	Sin	Cot	Sec	Csc	Tan	องศา	เรเดียน



$$\begin{aligned} \text{เช่น } \sin 24^\circ 20' &= 0.4120 \\ \tan 24^\circ 50' &= 0.4628 \\ \sin 65^\circ 10' &= 0.9075 \\ \tan 65^\circ 40' &= 2.2113 \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 7** จงใช้ตารางหาขนาดของมุม A เมื่อกำหนด  $\tan A = 0.5543$  และ  $0^\circ < A < 90^\circ$

**วิธีทำ** จาก  $\tan A = 0.5543$

จากตารางในคอลัมน์  $\tan$  ที่ค่า 0.5543 ตรงกับคอลัมน์  $\tan$  จากส่วนบนของตาราง

จึงอ่านค่ามุมจากซ้ายมือ

ซึ่ง  $\tan 29^\circ = 0.5543$

ดังนั้น มุม A เท่ากับ 29 องศา

**ตัวอย่างที่ 8** จงใช้ตารางหาขนาดของมุม B เมื่อกำหนด  $\sin B = 0.8570$  และ  $0^\circ < B < 90^\circ$

**วิธีทำ** จากตารางในคอลัมน์  $\sin$  ค่า 0.8570 ไม่มีในตาราง แต่มีค่าซึ่งใกล้เคียงค่า 0.8570 ที่สุด ได้แก่

0.8572 และตรงกับคอลัมน์  $\sin$  จากส่วนล่างของตาราง จึงอ่านค่ามุมจากขวามือ

ซึ่ง  $\sin 59^\circ \approx 0.8570$

ดังนั้น มุม B ประมาณ 59 องศา

**ตัวอย่างที่ 9** จงหาค่าของ  $2\sin 38^\circ \times \cos 72^\circ$

**วิธีทำ** จากตาราง  $\sin 38^\circ = 0.6157$

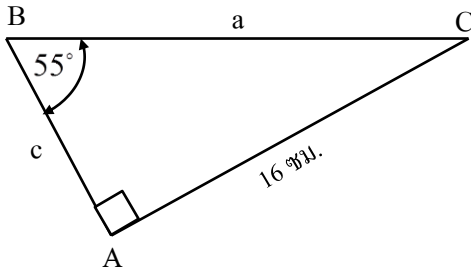
$\cos 72^\circ = 0.3090$

$2\sin 38^\circ \times \cos 72^\circ = 2 \times 0.6157 \times 0.3090$

ดังนั้น  $2\sin 38^\circ \times \cos 72^\circ = 0.3805$

ตัวอย่างที่ 10 จากรูป ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มุม B เท่ากับ 55 องศา ด้าน AC ยาว 16 เซนติเมตร  
 จงหาความยาวด้าน AB และ BC

วิธีทำ



$$\text{จากรูป } \sin 55^\circ = \frac{16}{a}$$

$$a = \frac{16}{\sin 55^\circ}$$

$$BC = \frac{16}{0.8192}$$

$$\text{จากรูป } \tan 55^\circ = \frac{16}{c}$$

$$c = \frac{16}{\tan 55^\circ}$$

$$AB = \frac{16}{1.4281}$$

ดังนั้น ความยาว AB เท่ากับ 11.2 เซนติเมตร และ BC เท่ากับ 19.53 เซนติเมตร