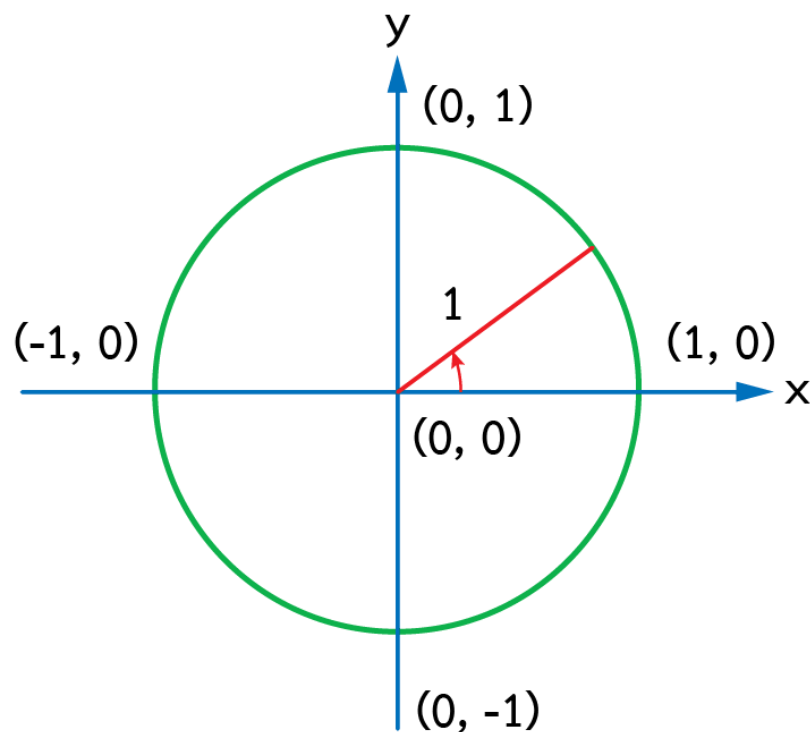


หน่วยที่ 3

วงกลมหนึ่งหน่วย





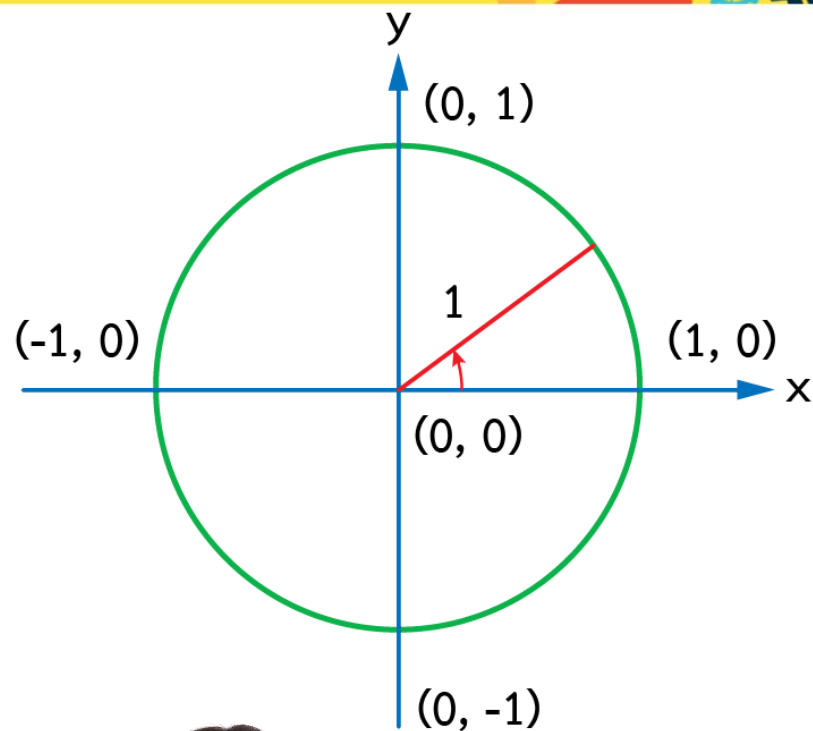
การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากวงกลมหนึ่งหน่วย

การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ มิได้จำกัดแต่เพียงอัตราส่วนของด้านของรูปสามเหลี่ยม มุมจากเท่านั้น แต่สามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม รอบจุดศูนย์กลางวงกลม โดยอาศัยวงกลมหนึ่งหน่วยและได้มีการพิจารณาไปใช้ประโยชน์อย่างกว้างขวาง

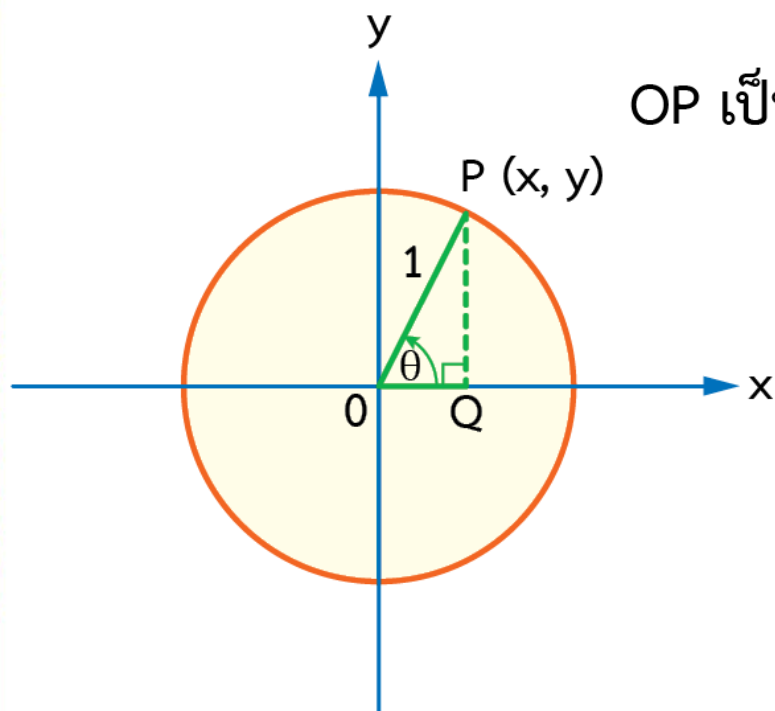


วงกลมหนึ่งหน่วย คือ วงกลม
ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ รัศมียาว 1
หน่วย

จุดยอดมุมอยู่ที่จุดศูนย์กลาง
ของวงกลม หรือจุด $(0, 0)$ ด้านเริ่มต้น
ของมุมอยู่บนแกน x ทางด้านบวก
เมื่อรังสีของมุมยาว 1 หน่วย หมุนในทิศ
ทวนเข็มนาฬิกา เมื่อด้านสิ้นสุดของมุม
อยู่บนแกน x หรือ แกน y (หมุนรอบจุด
ศูนย์กลาง) พิกัดของจุดบนแกน x และ
แกน y ได้แก่ $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, และ
 $(0, -1)$ ตามลำดับ



1 ด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในจตุภาคที่ 1



จากรูป มุม θ เป็นมุมในตำแหน่งมาตรฐาน
OP เป็นรัศมีของวงกลมยาว 1 หน่วย

จากรูป สามเหลี่ยมมุมฉาก POQ

$$\sin \theta = \frac{y}{1} = y$$

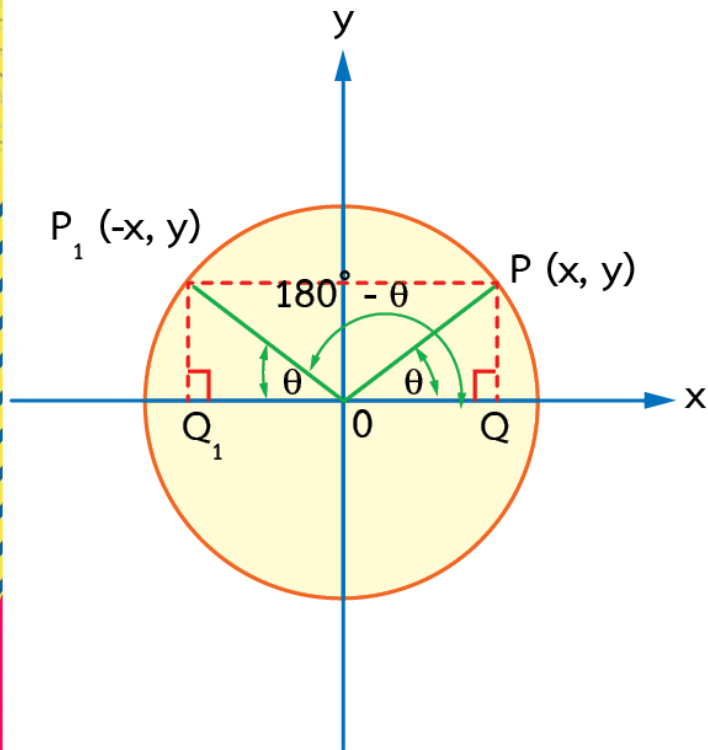
$$\cos \theta = \frac{x}{1} = x$$

$$\text{เนื่องจาก } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x}$$

② ด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในจตุภาคที่ 2

จากรูป OP_1 เป็นด้านสิ้นสุดของมุม อยู่ในจตุภาคที่ 2 จุดปลายพิกัด $P_1 (-x, y)$ และมุม P_1OQ_1 เท่ากับมุม POQ

มุม QOP_1 เท่ากับ $180^\circ - \theta$ และหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในจตุภาคที่ 2 ได้ ดังนี้



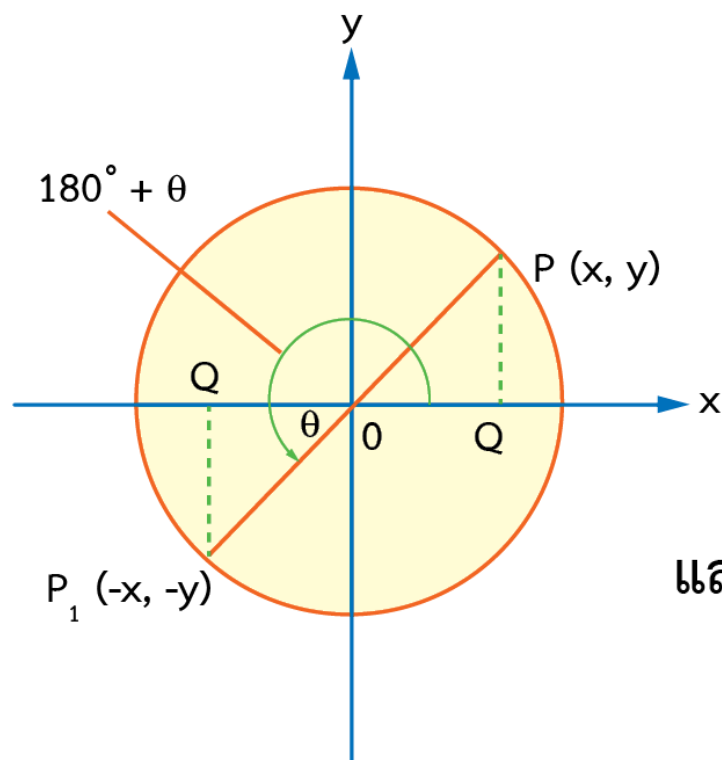
$$\sin (180^\circ - \theta) = \frac{y}{1} = y = \sin \theta$$

$$\cos (180^\circ - \theta) = \frac{-x}{1} = -x = -\cos \theta$$

$$\text{และ } \tan (180^\circ - \theta) = \frac{y}{-x} = -\tan \theta$$

③ ด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในจตุภาคที่ 3

จากรูป OP_1 เป็นด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในจตุภาคที่ 3 และจุดปลายพิกัด $P_1(-x, -y)$ มุม QOP_1 เท่ากับ $180^\circ + \theta$ และหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในจตุภาคที่ 3 ดังนี้



$$\sin (180^\circ + \theta) = \frac{-y}{1} = -y = -\sin \theta$$

$$\cos (180^\circ + \theta) = \frac{-x}{1} = -x = -\cos \theta$$

$$\text{และ } \tan (180^\circ + \theta) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan \theta$$

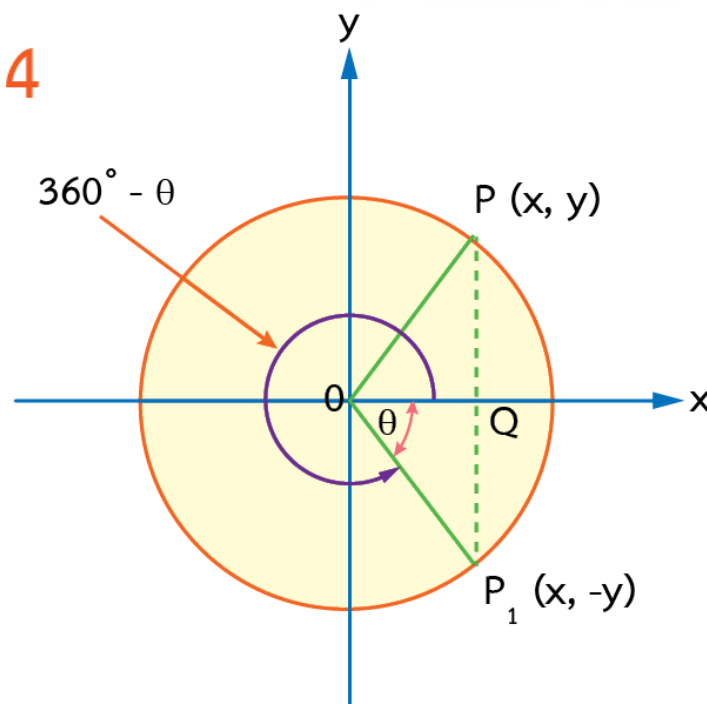
4 ด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในจตุภาคที่ 4

จากรูป OP_1 เป็นด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในจตุภาคที่ 4 และจุดปลายพิกัด $P_1(x, -y)$ มุม QOP_1 เท่ากับ $360^\circ - \theta$ และหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในจตุภาคที่ 4 ดังนี้

$$\sin (360^\circ - \theta) = \frac{-y}{1} = -y = -\sin \theta$$

$$\cos (360^\circ - \theta) = \frac{x}{1} = x = \cos \theta$$

$$\text{และ } \tan (360^\circ - \theta) = \frac{-y}{x} = -\tan \theta$$



สำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เป็นส่วนกลับ เช่น $\operatorname{cosec} \theta$, $\sec \theta$ และ $\cot \theta$ มีวิธีหาค่าทำนองเดียวกัน โดยใช้ความสัมพันธ์

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{x}{y}$$



จะเห็นว่าค่าตรีโกณมิติของมุมที่มีด้านสิ้นสุดของมุมในจตุภาคที่ 2, 3 และ 4 มีความสัมพันธ์กับค่าตรีโกณมิติของมุมที่มีด้านสิ้นสุดของมุมในจตุภาคที่ 1 ดังนี้

$$\sin (\pi - \theta) = \sin (180^\circ - \theta) = y = \sin \theta$$

$$\cos (\pi - \theta) = \cos (180^\circ - \theta) = -x = -\cos \theta$$

$$\tan (\pi - \theta) = \tan (180^\circ - \theta) = -\frac{y}{x} = -\tan \theta$$

$$\sin (\pi + \theta) = \sin (180^\circ + \theta) = -y = -\sin \theta$$

$$\cos (\pi + \theta) = \cos (180^\circ + \theta) = -x = -\cos \theta$$

$$\tan (\pi + \theta) = \tan (180^\circ + \theta) = \frac{y}{x} = \tan \theta$$

$$\sin (2\pi - \theta) = \sin (360^\circ - \theta) = -y = -\sin \theta$$

$$\cos (2\pi - \theta) = \cos (360^\circ - \theta) = x = \cos \theta$$

$$\tan (2\pi - \theta) = \tan (360^\circ - \theta) = -\frac{y}{x} = -\tan \theta$$

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะเป็นบวกหรือลบ พิจารณาได้จากมุมในตำแหน่งมาตรฐานว่าด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในจุดภาคใด กล่าวคือ

1

ถ้าด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในจุดภาคที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหมดมีค่าเป็นบวก

2

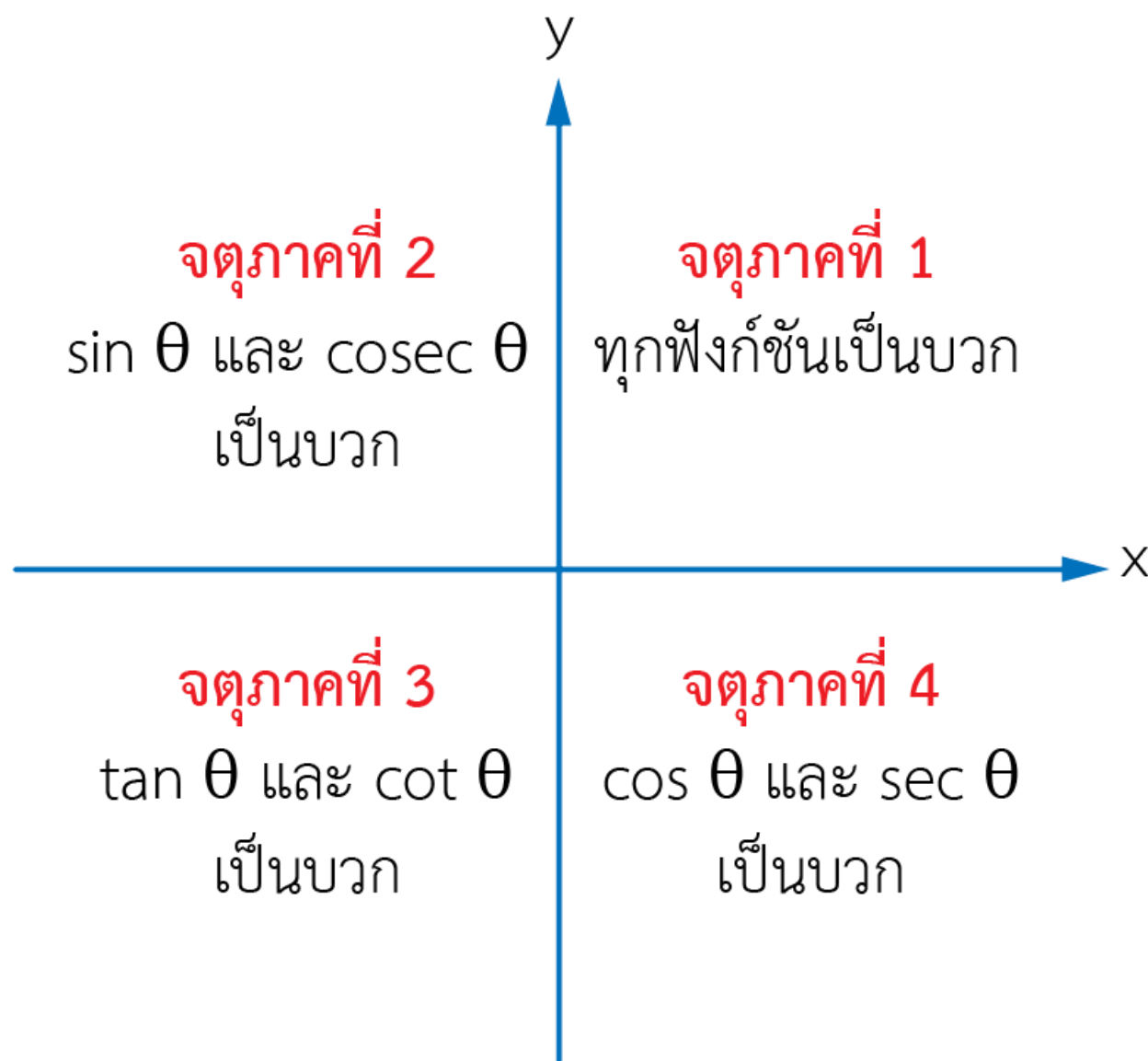
ถ้าด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในจุดภาคที่ 2 ค่า sine และ cosecant ของมุมมีค่าเป็นบวกและ 4 ฟังก์ชันที่เหลือมีค่าเป็นลบ

3

ถ้าด้านสิ้นสุดของมุม อยู่ในจุดภาคที่ 3 ค่า tangent และ cotangent ของมุมมีค่าเป็นบวก และ 4 ฟังก์ชันที่เหลือมีค่าเป็นลบ

4

ถ้าด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในจุดภาคที่ 4 ค่า cosine และ secant ของมุมมีค่าเป็นบวก และ 4 ฟังก์ชันที่เหลือมีค่าเป็นลบ



จตุภาคที่ 2

$\sin \theta$ และ $\operatorname{cosec} \theta$
เป็นบวก

จตุภาคที่ 1

ทุกฟังก์ชันเป็นบวก

จตุภาคที่ 3

$\tan \theta$ และ $\cot \theta$
เป็นบวก

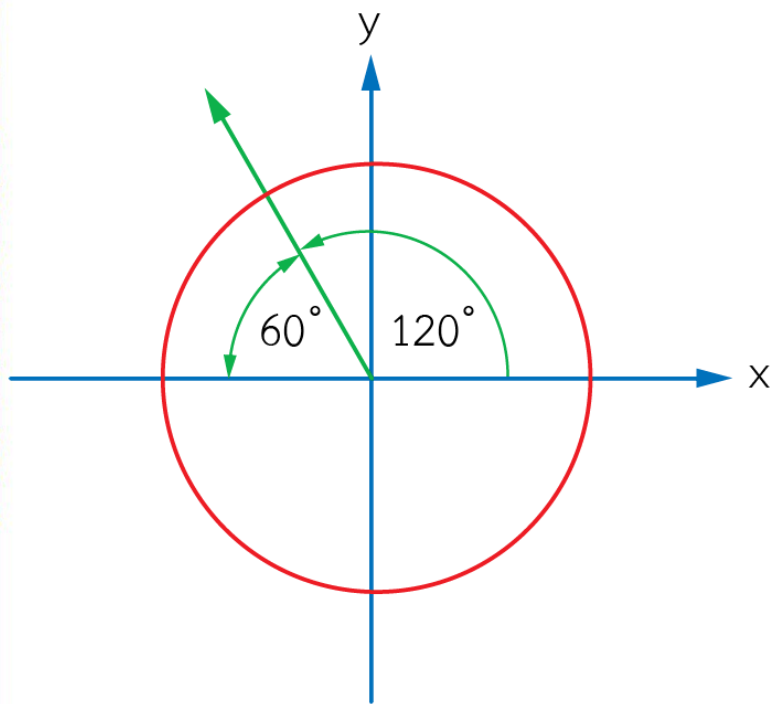
จตุภาคที่ 4

$\cos \theta$ และ $\sec \theta$
เป็นบวก

ตัวอย่างที่ 1

จงหาค่าของ $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$ และ $\tan 120^\circ$

วิธีทำ

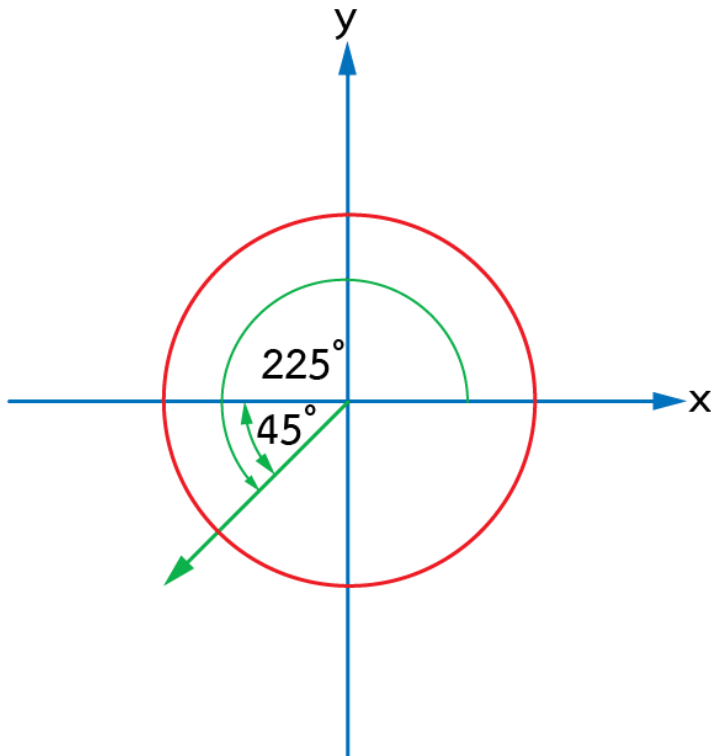


$$\begin{aligned}\sin 120^\circ &= \sin (180^\circ - 60^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 120^\circ &= \cos (180^\circ - 60^\circ) \\ &= -\cos 60^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \\ \tan 120^\circ &= \tan (180^\circ - 60^\circ) \\ &= -\tan 60^\circ \\ \tan 120^\circ &= -\sqrt{3}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2

จงหาค่าของ $\sin 225^\circ$, $\cos 225^\circ$ และ $\tan 225^\circ$

วิธีทำ



$$\sin 225^\circ = \sin (180^\circ + 45^\circ)$$

$$= -\sin 45^\circ$$

$$\sin 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 225^\circ = \cos (180^\circ + 45^\circ)$$

$$= -\cos 45^\circ$$

$$\cos 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 225^\circ = \tan (180^\circ + 45^\circ)$$

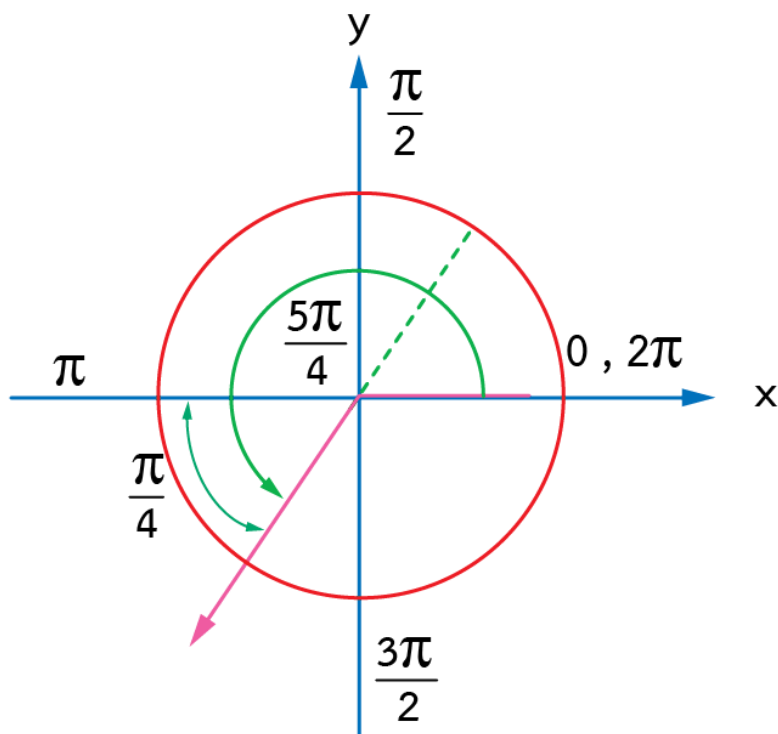
$$= \tan 45^\circ$$

$$\tan 225^\circ = 1$$

ตัวอย่างที่ 3

จงหาค่าของ $\tan \frac{5\pi}{4}$ และ $\sec \frac{5\pi}{4}$

วิธีทำ



$$\text{เนื่องจาก } \frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\tan \frac{5\pi}{4} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\tan \frac{5\pi}{4} = 1$$

$$\sec \frac{5\pi}{4} = \sec \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= -\sec \frac{\pi}{4}$$

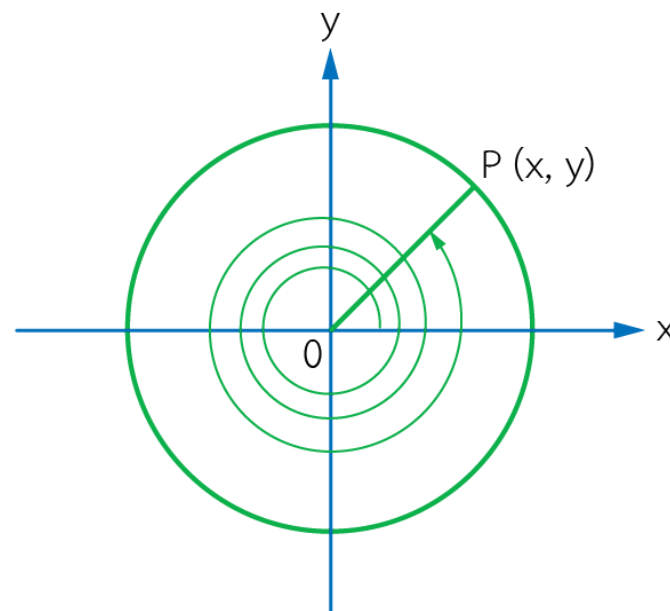
$$\sec \frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}$$



ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

$(n \cdot 360^\circ + \theta)$ หรือ $(2n\pi + \theta)$

จากรูปกำหนดให้รังสี OP หมุนจาก
 ด้านเริ่มต้น รอบจุด O ในทิศทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม θ พิกัดของจุด P เป็น (x, y) ถ้า OP หมุนต่อไปอีกหนึ่งรอบ เป็นมุม $(360^\circ + \theta)$ ด้านสิ้นสุดของมุม หรือรังสี OP จะหมุนไปอยู่ในตำแหน่งเดิม ดังนั้น



$$\begin{aligned}
 \sin (360^\circ + \theta) &= \sin \theta \\
 \cos (360^\circ + \theta) &= \cos \theta \\
 \tan (360^\circ + \theta) &= \tan \theta \\
 \operatorname{cosec} (360^\circ + \theta) &= \operatorname{cosec} \theta \\
 \sec (360^\circ + \theta) &= \sec \theta \\
 \cot (360^\circ + \theta) &= \cot \theta
 \end{aligned}$$

ถ้ารังสี **OP** หมุนต่อไปรอบจุด **O** อีก n รอบ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ใดๆ ขนาดของมุมเท่ากับ $(n \cdot 360^\circ + \theta)$ และด้านสิ้นสุดของมุม หรือ **OP** ยังคงอยู่ในตำแหน่งเดิม ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \sin (n \cdot 360^\circ + \theta) &= \sin \theta \\
 \cos (n \cdot 360^\circ + \theta) &= \cos \theta \\
 \tan (n \cdot 360^\circ + \theta) &= \tan \theta \\
 \operatorname{cosec} (n \cdot 360^\circ + \theta) &= \operatorname{cosec} \theta \\
 \sec (n \cdot 360^\circ + \theta) &= \sec \theta \\
 \cot (n \cdot 360^\circ + \theta) &= \cot \theta
 \end{aligned}$$

ในกรณีที่กำหนดมุมในหน่วยของเรเดียน มุมรอบจุดศูนย์กลาง
จึงเป็น $2n\pi$ เรเดียน เมื่อแกนของมุมหรือรังสี OP หมุนรอบจุด O
เป็นมุม $(n \cdot 360^\circ + \theta)$ ในระบบของเรเดียนจึงเป็น $(2n\pi + \theta)$

นั่นคือ	$\sin (2n\pi + \theta)$	=	$\sin \theta$
	$\cos (2n\pi + \theta)$	=	$\cos \theta$
	$\tan (2n\pi + \theta)$	=	$\tan \theta$
	$\operatorname{cosec} (2n\pi + \theta)$	=	$\operatorname{cosec} \theta$
	$\sec (2n\pi + \theta)$	=	$\sec \theta$
	$\cot (2n\pi + \theta)$	=	$\cot \theta$

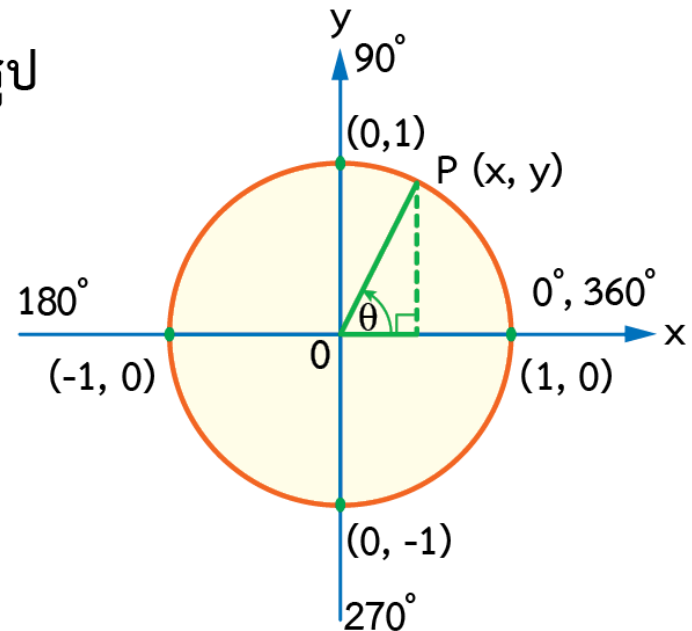


ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีด้านสิ้นสุด อยู่บนแกน x หรือแกน y

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่าสามารถหาค่า จากรูป
 $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ จากวงกลมหนึ่งหน่วย

$$\text{เมื่อ } \sin \theta = \frac{y}{1} = y$$

$$\text{และ } \cos \theta = \frac{x}{1} = x$$



ถ้าด้านสิ้นสุดของมุม อยู่บนแกน x ($0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$)
และด้านสิ้นสุดของมุม อยู่บนแกน y ($90^\circ, 270^\circ$)

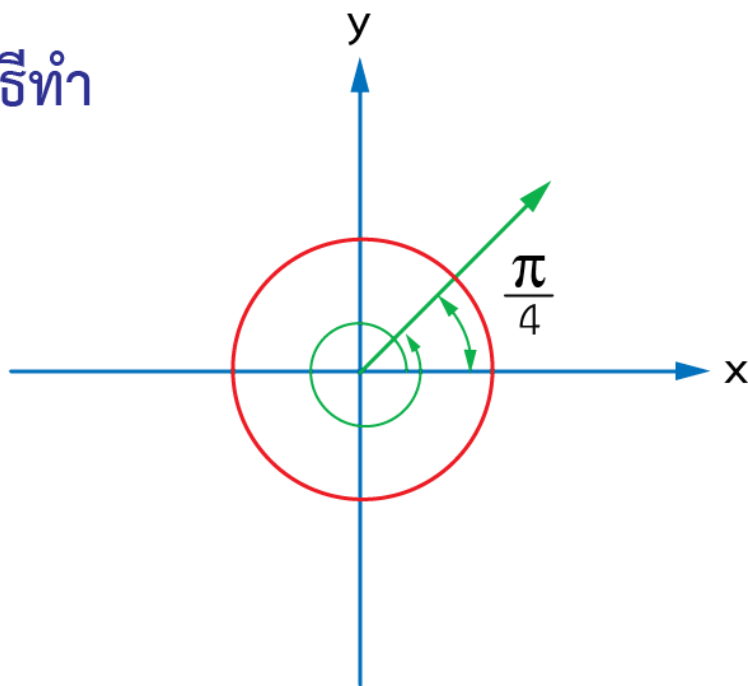
จุดปลายด้านสิ้นสุดมีพิกัด $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$
และ $(0, -1)$ หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังนี้

มุม ฟังก์ชัน	0° 0	90° $\frac{\pi}{2}$	180° π	270° $\frac{3\pi}{2}$	360° 2π
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1
$\tan \theta$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{1}{0}$ หาค่าไม่ได้	$\frac{0}{-1} = 0$	$\frac{-1}{0}$ หาค่าไม่ได้	$\frac{0}{1} = 0$
$\operatorname{cosec} \theta$	หาค่าไม่ได้	1	หาค่าไม่ได้	-1	หาค่าไม่ได้
$\sec \theta$	1	หาค่าไม่ได้	-1	หาค่าไม่ได้	1
$\cot \theta$	หาค่าไม่ได้	0	หาค่าไม่ได้	0	หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 4

จงหาค่าของ $\tan \frac{9\pi}{4}$

วิธีทำ



$$\text{เนื่องจาก } \frac{9\pi}{4} =$$

$$2\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\tan \frac{9\pi}{4} =$$

$$\tan \left(2\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$=$$

$$\tan \frac{\pi}{4}$$

$$\tan \frac{9\pi}{4} =$$

$$1$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\sin 840^\circ$

วิธีทำ

$$\text{เนื่องจาก } 840^\circ = 2 \cdot (360^\circ) + 120^\circ$$

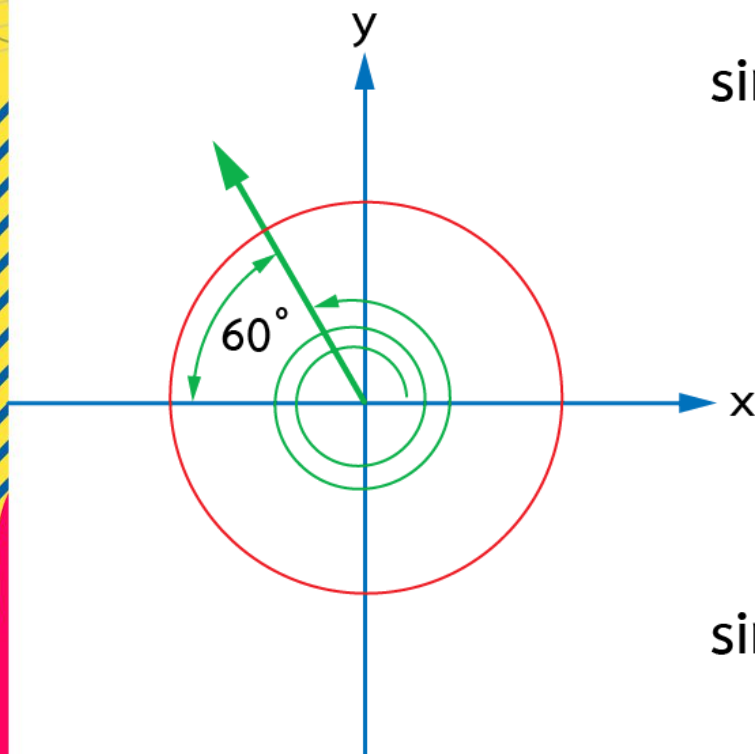
$$\sin 840^\circ = \sin (2 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$$

$$= \sin 120^\circ$$

$$= \sin (180^\circ - 60^\circ)$$

$$= \sin 60^\circ$$

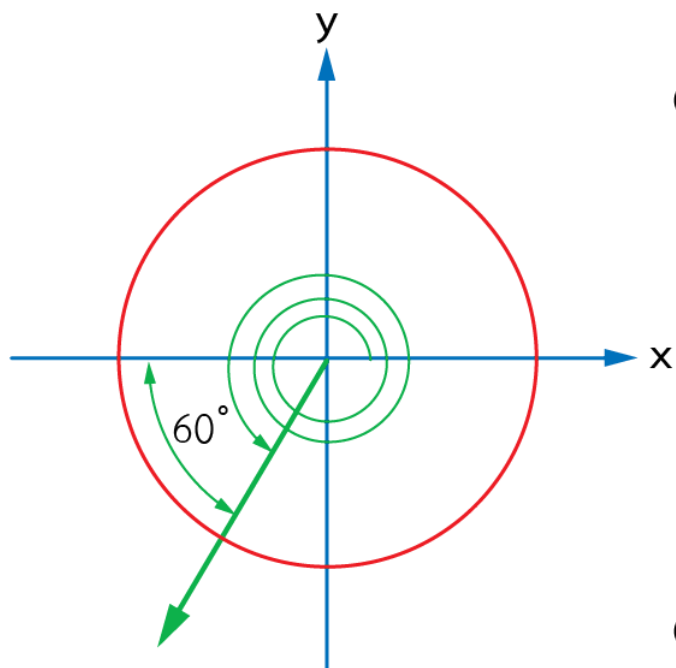
$$\sin 840^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



ตัวอย่างที่ 6

จงหาค่าของ $\cos 960^\circ$

วิธีทำ



เนื่องจาก $960^\circ =$

$$2 \cdot (360^\circ) + 240^\circ$$

$$\cos 960^\circ =$$

$$\cos (2 \cdot 360^\circ + 240^\circ)$$

$$=$$

$$\cos 240^\circ$$

$$=$$

$$\cos (180^\circ + 60^\circ)$$

$$=$$

$$-\cos 60^\circ$$

$$\cos 960^\circ =$$

$$-\frac{1}{2}$$