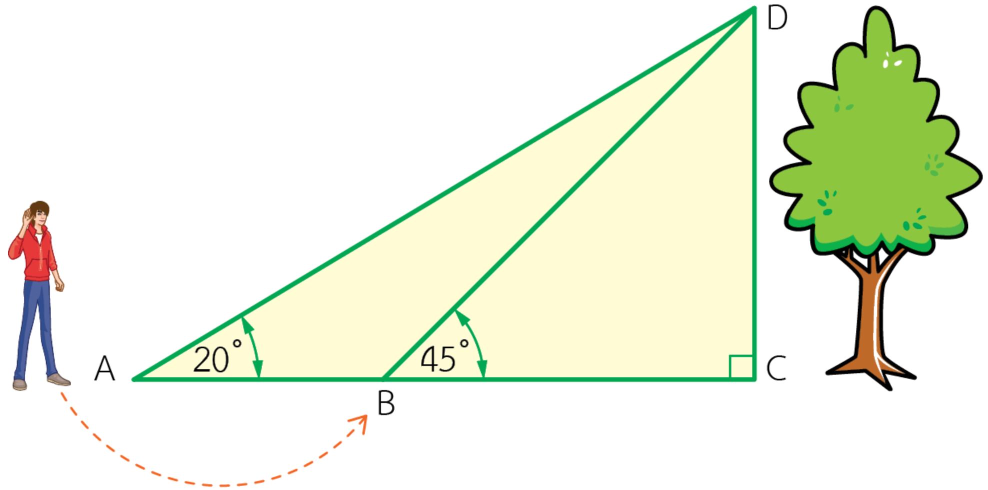
หน่วยที่ 4
การประยุกต์ตรีโกณมิติ



การประยุกต์ของ ตรีโกณมิติ

จากการศึกษาเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะเห็นได้ว่า อัตราส่วนตรีโกณมิติ เกี่ยวข้องกับด้าน และมุมของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งเราสามารถใช้ความรู้เหล่านี้คำนวณ ระยะทางหรือความสูงของสิ่งต่าง ๆ ได้

ตัวอย่างที่ 1 เสาธงต้นหนึ่งตั้งฉากกับแนวพื้นดิน ชายคนหนึ่งอยู่ห่างจากเสาธง 60 เมตร มองไปยังยอดเสาธงพบว่า แนวที่มองไปยังเสาธงทำมุม 30 องศา กับแนวพื้นดิน อยากทราบว่าเสาธงนี้สูงเท่าใด (โดยไม่คิดความสูงของผู้สังเกต)

วิธีทำ จากรูปสามเหลี่ยม ABC

ให้ AC เป็นความสูงของเสาธง

B เป็นจุดที่ผู้สังเกตอยู่ห่างจากเสาธงเป็นระยะทาง 60 เมตร

$A\hat{B}C$ เป็นมุมที่ทำกับยอดเสาธง 30°

$$\tan B = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AC}{60}$$

$$AC = 60 \tan 30^\circ$$

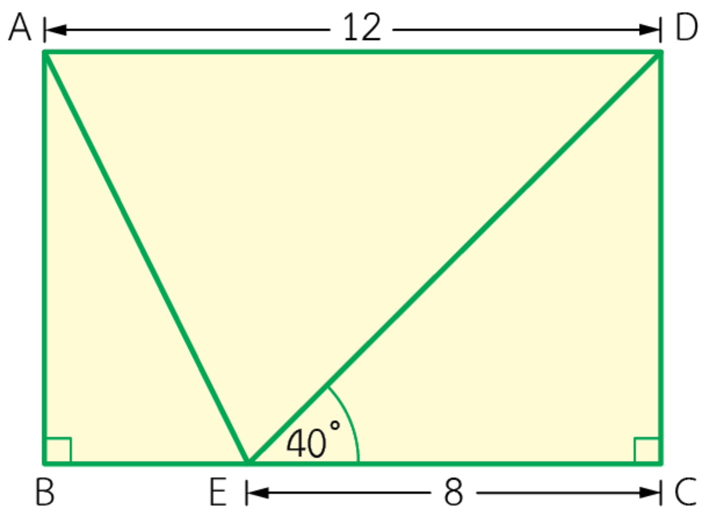
$$= 60 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$AC \approx 34.64$$

ดังนั้น เสาธงนี้สูงประมาณ 34.64 เมตร

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปจงหาพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD

วิธีทำ



จากรูปสามเหลี่ยม CED

$$\tan C\hat{E}D = \frac{CD}{CE}$$

แทนค่า $\tan 40^\circ = \frac{CD}{8}$

จากตาราง $\tan 40^\circ = 0.8391$

ดังนั้น $CD = 0.8391 \times 8$

$CD = 6.71$

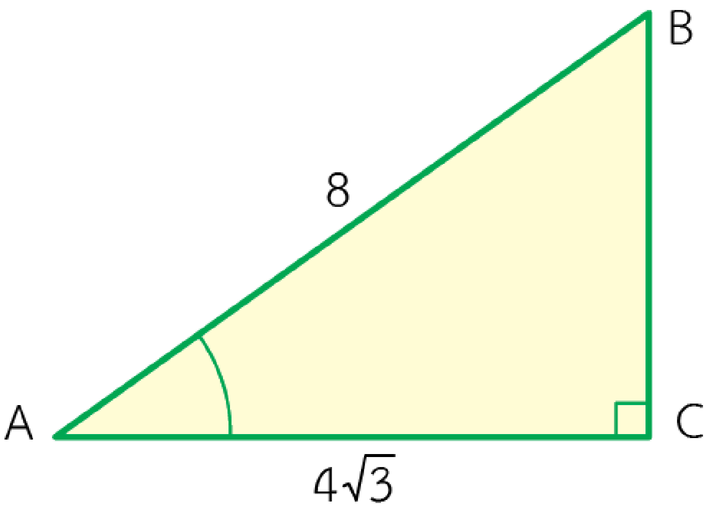
พื้นที่สี่เหลี่ยม $ABCD = AD \times CD$

$= 12 \times 6.71$

พื้นที่สี่เหลี่ยม ABCD = 80.52 ตารางหน่วย

ตัวอย่างที่ 3 จงหามุมซึ่งเกิดจากพื้นเอียงทำมุมกับแนวราบ (ดังรูป) เมื่อกำหนดพื้นเอียง AB = 8 หน่วย แนวราบ AC = 4 $\sqrt{3}$ หน่วย

วิธีทำ



$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

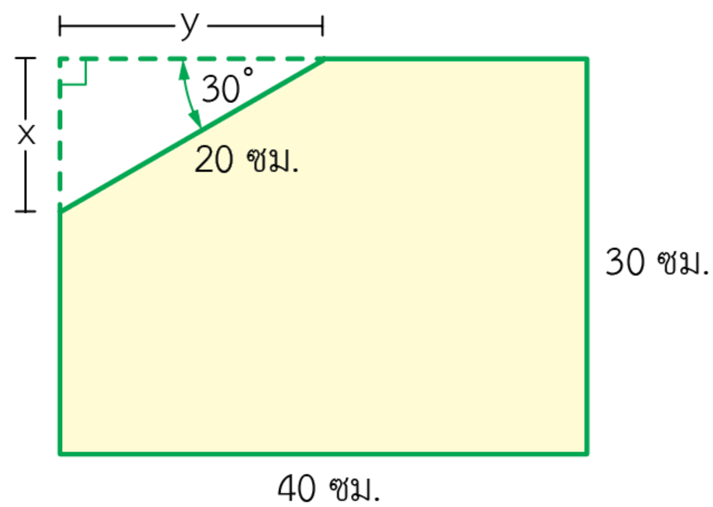
$$= \frac{4\sqrt{3}}{8}$$

$$\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos A = \cos 30^{\circ}$$

ดังนั้น $A = 30$ องศา

ตัวอย่างที่ 4 แผ่นอะลูมิเนียม ขนาดกว้าง 30 เซนติเมตร ยาว 40 เซนติเมตร ต้องการตัดแผ่นอะลูมิเนียมที่มุม (ดังรูป) จงหาพื้นที่แผ่นอะลูมิเนียมที่เหลือ



วิธีทำ จากรูป หาค่า x

$$\sin 30^\circ = \frac{x}{20}$$

$$x = 20 \sin 30^\circ$$

$$= 20 \times \frac{1}{2}$$

$$x = 10$$ เซนติเมตร

จากรูป หาค่า y

$$\cos 30^\circ = \frac{y}{20}$$

$$y = 20 \cos 30^\circ$$

$$= 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y \approx 17.32$$ เซนติเมตร

เนื่องจากตัดแผ่นอะลูมิเนียมที่มุม เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times 10 \times 17.32$

$= 86.6$ ตารางเซนติเมตร

พื้นที่แผ่นอะลูมิเนียมที่เหลือ = พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า - พื้นที่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$= (30 \times 40) - 86.6$

ดังนั้น แผ่นอะลูมิเนียมที่เหลือมีพื้นที่เท่ากับ 1,113.4 ตารางเซนติเมตร

สรุป

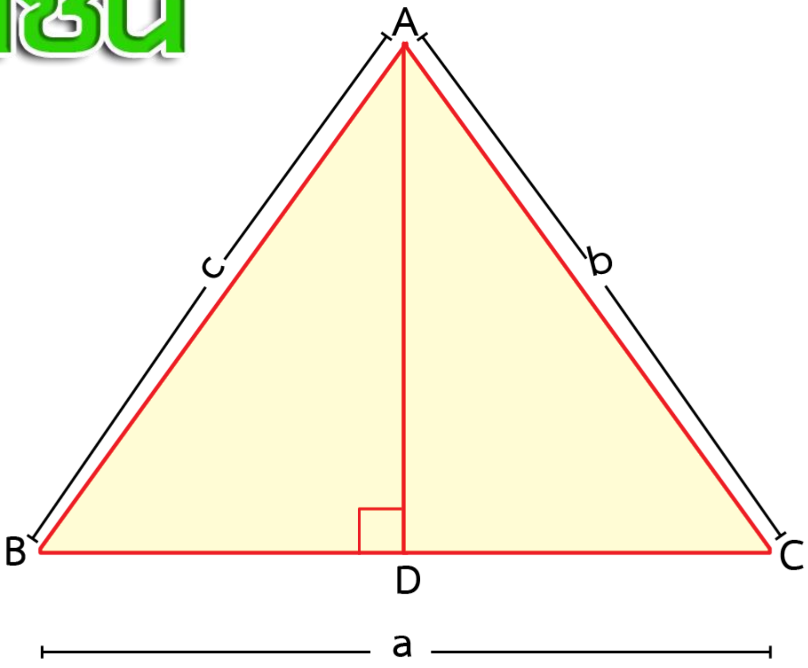
การหาระยะทางและความสูงโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ มีวิธีการดังต่อไปนี้

1. เขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก กำหนดสิ่งต่างๆ ในรูปตามที่โจทย์กำหนด
2. สร้างสมการเพื่อหาค่าตัวแปร โดยเขียนอัตราส่วนของด้าน

$$\frac{\text{ด้านที่ต้องการหา}}{\text{ด้านที่ทราบแล้ว}} = \text{อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่ทราบ}$$

กฎของไซน์

การหาความยาวของด้าน และขนาดของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม โดยที่ไม่จำเป็นต้องเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยใช้กฎของไซน์ ซึ่งกล่าวถึงอัตราส่วนระหว่างความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม และไซน์ของมุม ที่อยู่ตรงข้ามกับด้านนั้น



พิจารณารูป สามเหลี่ยม ABC ซึ่งมี A,B และ C เป็นจุดยอดมุม a, b, c เป็นความยาวด้านBC, AC และ AB ตามลำดับ

AD ตั้งฉากกับ BC และเป็นส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม ABC

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABD

$$\sin B = \frac{AD}{AB}$$

$$\sin B = \frac{AD}{c}$$

ดังนั้น $AD = c \sin B$

รูปสามเหลี่ยม ABC หาพื้นที่ เมื่อ BC เป็นฐาน และ AD เป็นส่วนสูง

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$

$$= \frac{1}{2} ac \sin B$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC เมื่อ AB เป็นฐานของรูปสามเหลี่ยม หรือ AC เป็นฐานของรูปสามเหลี่ยม

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}bc\sin A$

$$= \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

เมื่อ นำ $\frac{1}{2}abc$ หาร

$$\frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{\frac{1}{2}abc} = \frac{\frac{1}{2}ac\sin B}{\frac{1}{2}abc} = \frac{\frac{1}{2}ab\sin C}{\frac{1}{2}abc}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

เขียนกฎของไซน์ ดังนี้

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

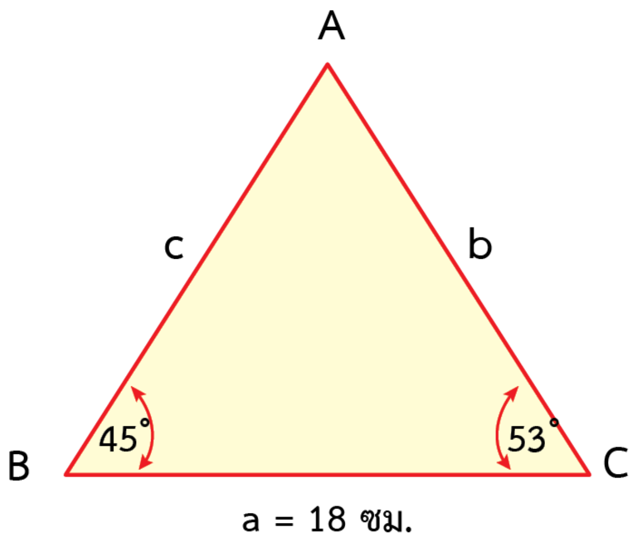
กฎของไซน์ สามารถนำไปใช้ในการหาความยาวด้าน หรือมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม โดยโจทย์อาจกำหนดความยาวด้าน หรือมุมของรูปสามเหลี่ยมเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 เมื่อกำหนดขนาดของมุม 2 มุม และความยาว 1 ด้าน

กรณีที่ 2 เมื่อกำหนดความยาวของด้าน 2 ด้าน และมุม 1 มุม ซึ่งไม่ใช่มุมที่อยู่ระหว่างด้านที่กำหนด

กรณีที่ 1 เมื่อกำหนดขนาดของมุม 2 มุม และความยาว 1 ด้าน

ตัวอย่างที่ 1 จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ มุม B ขนาด 45 องศา มุม C ขนาด 53 องศา ด้าน a ยาว 18 เซนติเมตร จงหาความยาวด้าน b และด้าน c



วิธีทำ

จากโจทย์ ขนาดของมุม A $= 180^\circ - 45^\circ - 53^\circ$

$= 82^\circ$

จากกฎของไซน์

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{18}{\sin 82^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$$

$$b = \frac{18 \times \sin 45^\circ}{\sin 82^\circ}$$

$$= \frac{18 \times 0.7071}{0.9903}$$

$$b = 12.85 \text{ เซนติเมตร}$$

จากกฎของไซน์

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{18}{\sin 82^\circ} = \frac{c}{\sin 53^\circ}$$

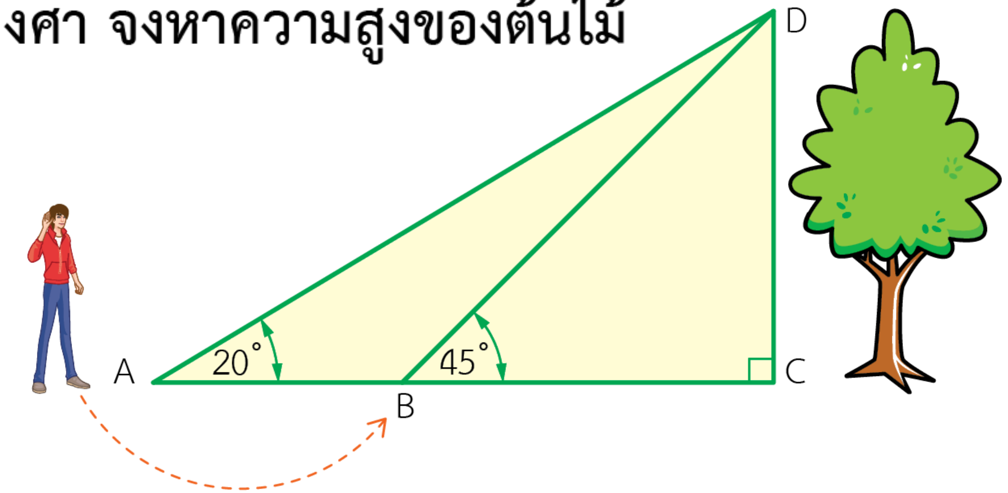
$$c = \frac{18 \times \sin 53^\circ}{\sin 82^\circ}$$

$$= \frac{18 \times 0.7986}{0.9903}$$

$$c = 14.52 \text{ เซนติเมตร}$$

ดังนั้น ความยาวด้าน b เท่ากับ 12.85 เซนติเมตร และด้าน c เท่ากับ 14.52 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2 นายสนั่นยืนอยู่บนพื้นราบ มองไปที่ยอดต้นไม้เป็นมุม 20 องศา ถ้าเขาเดินเข้าใกล้ต้นไม้มากขึ้น 70 ฟุต มองไปที่จุดเดิม เป็นมุม 45 องศา จงหาความสูงของต้นไม้



วิธีทำ รูปสามเหลี่ยม ABD

มุม ABD เท่ากับ $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

มุม ADB เท่ากับ $180^\circ - 135^\circ - 20^\circ = 25^\circ$

จากรูปสามเหลี่ยม ABD กฎของไซน์ จะได้ว่า

$$\frac{BD}{\sin 20^\circ} = \frac{AB}{\sin 25^\circ}$$

$$\frac{BD}{0.3420} = \frac{70}{0.4226}$$

$$BD = \frac{70 \times 0.3420}{0.4226}$$

$$BD = 56.65 \quad \text{ฟุต}$$

จากรูปสามเหลี่ยม BCD

$$\sin 45^\circ = \frac{DC}{BD}$$

$$0.7071 = \frac{DC}{56.65}$$

$$DC = 56.65 \times 0.7071$$

ดังนั้น ความสูงของต้นไม้ เท่ากับ 40.06 ฟุต

กรณีที่ 2 เมื่อกำหนดความยาวของด้าน 2 ด้าน และมุม 1 มุม ซึ่งไม่ใช่มุมที่อยู่ระหว่างด้านที่กำหนด

ตัวอย่างที่ 3 ในรูปสามเหลี่ยม ABC กำหนดให้มุม B มีขนาด 45 องศา ด้าน $b = 2\sqrt{2}$ และ ด้าน $c = 2\sqrt{3}$ จงหาขนาดมุม A และมุม C

วิธีทำ

จาก
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin c}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin C}$$

$$\sin C = \frac{2\sqrt{3} \times \sin 45^\circ}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

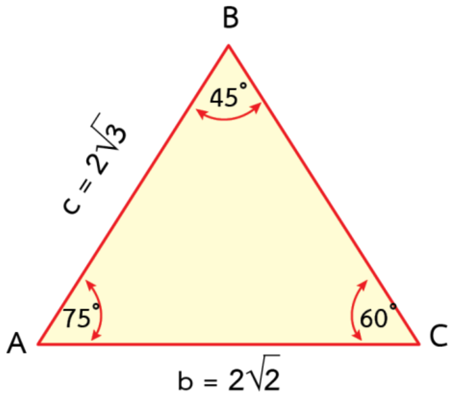
$$= \sin 60^\circ \quad \text{หรือ } \sin 120^\circ$$

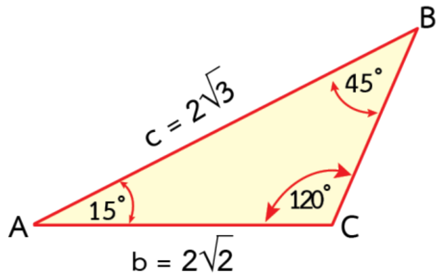
ดังนั้น มุม $C = 60^\circ$ หรือ 120°

ถ้า มุม $C = 60^\circ$ แล้ว มุม $A = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$

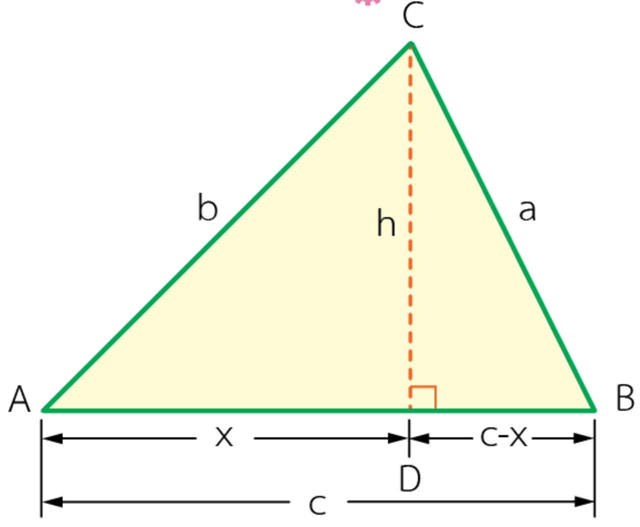
ถ้า มุม $C = 120^\circ$ แล้ว มุม $A = 180^\circ - (45^\circ + 120^\circ) = 15^\circ$

เขียนรูปสามเหลี่ยม ABC ได้ 2 ลักษณะ ดังนี้





กฎของโคไซน์



Δ ADC ; $h^2 = b^2 - x^2$ ... ①

Δ BDC ; $h^2 = a^2 - (c - x)^2$ ... ②

จาก ① และ ②

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx \quad ... ③$$

จากรูป Δ ADC ; $x = b \cos A$

แทนค่า $x = b \cos A$ ใน ③

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2c(b \cos A)$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2bc \cos A$$

ดังนั้น $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

ในทำนองเดียวกัน สามารถหาค่า b และ c ดังนี้

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า **กฎของโคไซน์**

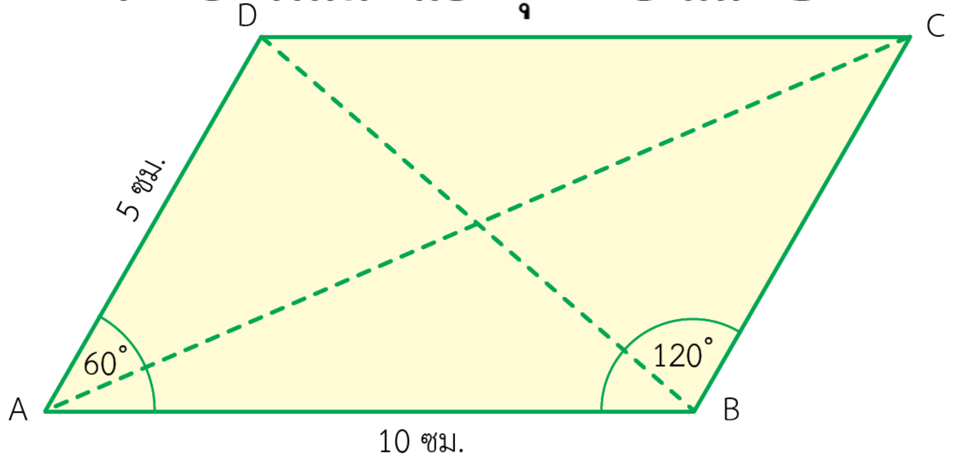
จากกฎของโคไซน์ สามารถหาค่า cos A cos B และ cos C ได้ดังนี้

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีมุม $A = 60^\circ$, มุม $B = 120^\circ$, AD = 5 เซนติเมตร AB = 10 เซนติเมตร จงหาความยาวเส้นทแยงมุม AC และ BD



วิธีทำ

ในรูปสามเหลี่ยม ABC จากกฎโคไซน์ จะได้ว่า

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \cdot BC \cos B$$

$$= (10)^2 + (5)^2 - 2(10)(5)\cos 120^\circ$$

$$= 100 + 25 - 100\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$AC^2 = 175$$

$$AC = \sqrt{175} \approx 13.23$$

ดังนั้น ความยาวเส้นทแยงมุม AC เท่ากับ 13.23 เซนติเมตร

ในรูปสามเหลี่ยม ABD จากกฎโคไซน์ จะได้ว่า

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2\ AD \cdot AB \cos A$$

$$= (5)^2 + (10)^2 - 2(5)(10) \cos 60^\circ$$

$$= 25 + 100 - 100\left(\frac{1}{2}\right)$$

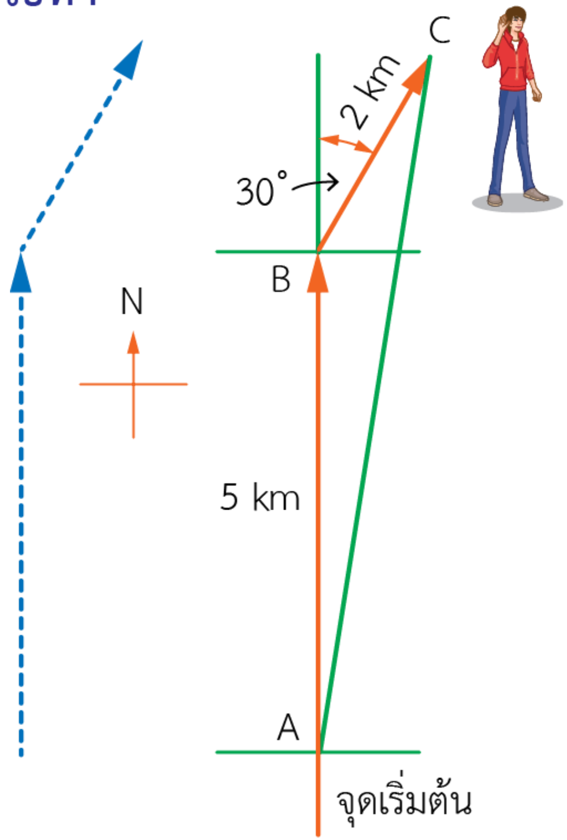
$$BD^2 = 75$$

$$BD = \sqrt{75} \approx 8.66$$

ดังนั้น ความยาวเส้นทแยงมุม BD เท่ากับ 8.66 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 5 นายกิตติคุณเดินทางไปทางทิศเหนือ 5 กิโลเมตร แล้วเดินไป ในทิศ 30° กับทิศเหนือไปทางตะวันออกอีก 2 กิโลเมตร อยากทราบว่าเขาอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเท่าไร

วิธีทำ



ในรูปสามเหลี่ยม ABC

$$\text{มุม } ABC = 180^\circ - 30^\circ$$

$$= 150^\circ$$

ด้าน AC เป็นระยะห่างที่นายกิตติคุณอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น

จากกฎของโคไซน์

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos A\hat{B}C$$

$$= (5)^2 + (2)^2 - 2(5)(2)\cos(180^\circ - 30^\circ)$$

$$= (5)^2 + (2)^2 + 2(5)(2)\cos 30^\circ$$

$$= 25 + 4 + (20)(0.8660)$$

$$AC^2 = 46.32$$

$$AC = 6.81 \quad \text{กิโลเมตร}$$

ดังนั้น นายกิตติคุณอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น 6.81 กิโลเมตร