หน่วยที่ 6 ตัวกำหนด

การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยวิธีการคูณทแยง

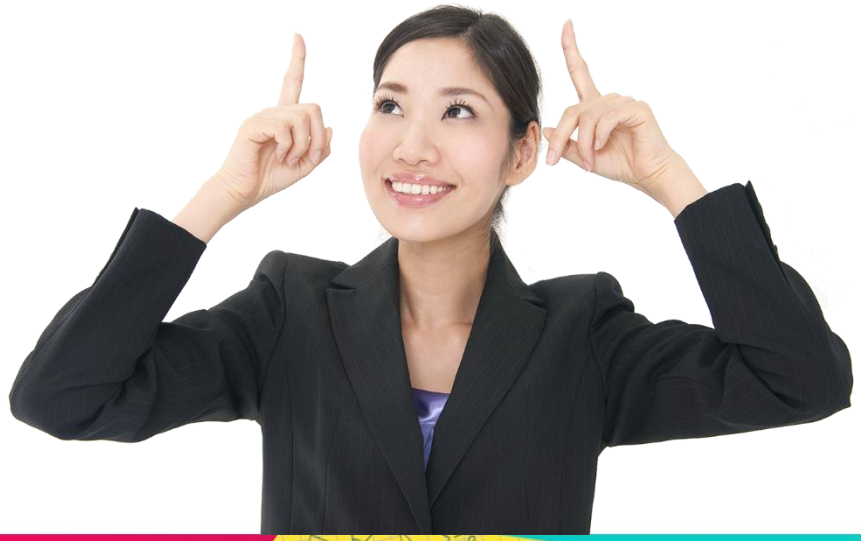
กำหนด A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ เขียนแทนด้วย $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ แล้วดีเทอร์มิแนนต์ของ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ det A หรือ $|A|$ ซึ่งสามารถหาได้ดังนี้

1 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส 1×1 คือ สมาชิกที่อยู่ในเมทริกซ์จัตุรัส 1×1 กล่าวคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{1 \times 1}$ แล้ว $|A| = a_{ij}$

เช่น	A	=	[3]	จะได้	$\lvert A \rvert$	=	3
	B	=	[–2.5]	จะได้	$\lvert B \rvert$	=	–2.5

2 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส 2×2 คือ ผลต่างของผลคูณระหว่างสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักกับผลคูณสมาชิกที่ไม่ได้อยู่บนเส้นทแยงมุมหลัก กล่าวคือ ถ้า $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ **แล้วจะได้** $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

นั่นคือ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ $-$ $+$



ตัวอย่างที่ 1 หาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

1) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - (-1)3 = 7$

2) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 2(0) - (-3)(-5) = -15$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า x จากสมการ

$$\begin{vmatrix} 4 & 2x \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

วิธีทำ

$$\begin{vmatrix} 4 & 2x \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

$$(4)(5) - (2)(2x) = 4$$

$$20 - 4x = 4$$

$$-4x = 4 - 20 = -16$$

$$x = \frac{-16}{-4} = 4$$

❸ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส 3×3

การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัส 3×3 สามารถใช้วิธีคูณทแยงได้ โดยการนำหลักที่ 1 และ 2 มาต่อเป็นหลักที่ 4 และ 5 แล้วนำผลบวกจากการคูณสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมจากบนซ้ายมาล่างขวาลบด้วยผลคูณของสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมจากล่างซ้ายไปบนขวา

กล่าวคือ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

จะได้ $|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A ต่อไปนี้

วิธีทำ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

จะได้ $$|A| = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & - & - & - \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & & + & + & + \end{array} \end{array}$$

$$|A| = 20 + 0 - 9 - (-2) - 18 - 0 = -5$$

หรือ $$|A| = (20 + 0 - 9) - (-2 + 18 + 0) = -5$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่า x ที่ทำให้ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ x & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

วิธีทำ

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ x & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ x & 0 & 4 & x & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

$$0 + 4 + 3x - 0 - 8 - 2x = 0$$

$$x - 4 = 0$$

ดังนั้น $x = 4$

สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $k \neq 0$ จะได้ว่า

1. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีสมาชิกแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) เป็นศูนย์ทั้งหมดแล้ว det A = 0

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

❷ ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเหมือนกันสองแถว (หรือสองหลัก) แล้ว det A = 0 เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{(หลักที่ 1 = หลักที่ 3)} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

❸ ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีแถวหนึ่งเป็น k เท่าของอีกแถวหนึ่ง หรือหลักหนึ่งเป็น k เท่าของอีกหลักหนึ่งแล้ว det A = 0

เช่น $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ -9 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ เนื่องจากหลักที่หนึ่งเป็น 3 เท่าของหลักที่สาม

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ -9 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (9 - 18 + 12) - (9 + 12 - 18) = 0$$

❹ ถ้าเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B เกิดจากการสลับแถวคู่ใดคู่หนึ่ง (หรือสลับหลักคู่ใดคู่หนึ่ง) ของ A แล้วจะได้ det B = –det A

สลับแถวที่ i และแถวที่ j แทนด้วย $R_i \leftrightarrow R_j$

สลับหลักที่ i และหลักที่ j แทนด้วย $C_i \leftrightarrow C_j$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ ให้ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

โดยที่ B เกิดจาก $R_1 \leftrightarrow R_2$ ของ A

จากการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์จะได้

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 48 - 36 = 12$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 48 = -12$$

ดังนั้น det B = –det A

5 ถ้าเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B เกิดจากการคูณแต่ละสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) ของ A ด้วยจำนวนจริง k แล้ว det B = k det A

เช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 12$ และ $k = -2$

$B = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ เกิดจาก $(-2)\,C_1$ ของ A

$$\det B = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (-72 - 24 + 0) - (-24 - 48 + 0)$$

$$= -24 = (-2)(12)$$

$$= (-2)\det A$$

ดังนั้น $\det B = (-2)\det A$

6 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ แล้ว $\det A = \det A^t$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det A^t = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$

ดังนั้น $\det A = \det A^t$

7 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ แล้ว $\det AB = \det A \cdot \det B$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -7$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = 1$

$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det AB = -7$

$\det AB = \det A \cdot \det B$

8 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ และเมทริกซ์ B เกิดจากการคูณเมทริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง k แล้ว $\det B = k^n \det A$ หรือ $\det kA = k^n \det A$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 2$ และ $k = 2$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 2A \Rightarrow \det B = 16$

ดังนั้น $\det(B) = (2)^3 \det(A)$

9 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ และเมทริกซ์ B เกิดจากการนำจำนวนจริง k คูณแถวที่ s หรือหลักที่ s ของ A แล้วนำไปบวกเพิ่มไว้ในแถวที่ r หรือหลักที่ r ของ A โดยที่ $s \neq r$ แทนด้วย $kR_s + R_r$ หรือ $kC_s + C_r$ แล้ว $\det B = \det A$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -12$ และ $k = -2$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$ เกิดจาก $R_3 - 2R_1$ ของ A

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = (-8 + 2 - 27) - (6 - 3 - 24) = -12$$

ดังนั้น $\det B = \det A$

10 ถ้า A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ แล้ว $\det A^n = (\det A)^n$

เช่น $A^n = A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ คูณกัน n เมทริกซ์

$\det A^n = \det (A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A)$

$= (\det A)(\det A)(\det A)\ldots(\det A)$

$\det A^n = [\det A]^n$

11 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ และเป็นเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยม แล้ว det (A) เท่ากับผลคูณของสมาชิก ในแนวทแยงมุมหลัก

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = (1)(2)(-4) = -8$

ถ้า I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ แล้ว $\det(I_n) = 1$

เช่น $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det I = 1$