



บทที่ 7

การอ้างอิงเหตุผล
และตัวบ่งปริมาณ

4



สาระการเรียนรู้

1. การอ้างเหตุผล
2. ประโยชน์เปิด
3. ตัวบ่งปริมาณ
4. ค่าความจริงของประพจน์
ที่มีตัวบ่งปริมาณตัวเดียว

1 การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผล (Argument) หมายถึง การอ้างว่าถ้ามีเหตุ $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ แล้วสามารถสรุปผล c ได้

การอ้างเหตุผลประกอบด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วน คือ

- 1) สมมติฐาน (Hypotheses) คือ ส่วนที่เป็น “เหตุ” หรือ สิ่งที่กำหนดให้แทนด้วยประพจน์ย่ออย $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$
- 2) ผลสรุป (Conclusion) คือ ข้อสรุปจากสมมติฐานหรือเหตุ หรือส่วนที่เป็น “ผล” แทนด้วย c

1 การอ้างเหตุผล

การตรวจสอบการอ้างเหตุผลมีดังนี้

- 1) ถ้ารูปแบบของประพจน์ $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \dots \wedge p_n) \rightarrow c$ เป็นสัจニรันดร์ แล้ว การอ้างเหตุผลนี้
สมเหตุสมผล (Valid)
- 2) ถ้ารูปแบบของประพจน์ $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \dots \wedge p_n) \rightarrow c$ ไม่เป็นสัจニรันดร์ แล้ว การอ้างเหตุผลนี้
ไม่สมเหตุสมผล (Invalid)

1 การอ้างเหตุผล

จากการอ้างเหตุผลที่จัดให้อยู่ในรูปแบบของประพจน์ ถ้า...แล้ว... คือ เหตุ → ผล จากนั้นทำการตรวจสอบดูว่าเป็นสิ่งนิรันดร์หรือไม่ สามารถทำได้ดังนี้

- 1) โดยการสร้างตารางค่าความจริง
- 2) โดยการวิเคราะห์ค่าความจริง



ตัวอย่าง

จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่
เหตุ 1) ถ้านักศึกษาตั้งใจเรียนแล้วนักศึกษาสอบผ่าน
 2) นักศึกษาตั้งใจเรียน
ผล นักศึกษาสอบผ่าน

วิธีทำ

ให้ p แทนนักศึกษาตั้งใจเรียน, q แทนนักศึกษาสอบผ่าน

จะได้รูปแบบของประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

สร้างตารางแสดงค่าความจริงรูปแบบของประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ เป็นสัจニรันดร์หรือไม่

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	T

จากตารางแสดงค่าความจริงรูปแบบของประพจน์เป็นสัจニรันดร์
 ดังนั้น การอ้างเหตุผลนี้จึงสมเหตุสมผล (Valid)



รูปแบบการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลที่ควรทราบ มีดังนี้

รูปแบบที่ 1		รูปแบบที่ 2	
เหตุ	1) $p \rightarrow q$ 2) p	เหตุ	1) $p \rightarrow q$ 2) $\sim q$
ผล	q	ผล	$\sim p$



รูปแบบการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลที่ควรทราบ มีดังนี้

รูปแบบที่ 3	รูปแบบที่ 4
เหตุ 1) $p \rightarrow q$ 2) $q \rightarrow r$	เหตุ 1) $p \vee q$ 2) $\sim p$
ผล $p \rightarrow r$	ผล q
รูปแบบที่ 5	รูปแบบที่ 6
เหตุ $p \wedge q$ ผล p (หรือ q)	เหตุ p ผล $p \vee q$



รูปแบบการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลที่ควรทราบ มีดังนี้

รูปแบบที่ 7	รูปแบบที่ 8
เหตุ $p \rightarrow q$	เหตุ 1) $p \rightarrow r$
ผล $\sim q \rightarrow \sim p$ (หรือ $p \vee q$)	2) $q \rightarrow s$ 3) $p \vee q$
	ผล $r \vee s$

2 ประโยคเปิด

ประโยคเปิด คือ ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธ ที่ประกอบด้วยตัวแปรทำให้ไม่เป็นประพจน์ และเมื่อแทนที่ตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์แล้วจะได้ประพจน์

$x + 3 > 7$; ประโยคเปิดที่มีตัวแปร “ x ”

$x - y = 10$; ประโยคเปิดที่มีตัวแปร “ x และ y ”

เข้าเป็นนักฟุตบอลทีมชาติไทย ; ประโยคเปิดที่มีตัวแปร “เข้า”

เรอเป็นนักศึกษาระดับ ปวส. ; ประโยคเปิดที่มีตัวแปร “เรอ”

ประโยคข้างต้นไม่เป็นประพจน์ เพราะเรามิ่งทราบค่าของตัวแปรในแต่ละประโยคนั้นคืออะไร และไม่สามารถหาค่าความจริงได้

ลัญลักษณ์ที่ใช้แทนประโยคเปิด

$P(x)$, $Q(x)$ แทน ประโยคเปิดที่มีตัวแปรเป็น x

$P(x, y)$, $Q(x,y)$ แทน ประโยคเปิดที่มีตัวแปรเป็น x, y

เช่น $P(x)$ แทน $x + 3 > 7$

$P(x, y)$ แทน $x - y = 10$



ตัวอย่าง

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นประพจน์หรือเป็นประโยชน์เปิด
ถ้าเป็นประโยชน์เปิด ตัวแปรคืออะไร หรือไม่เป็นทั้งประพจน์และประโยชน์เปิด

ข้อความ	ประพจน์	ประโยชน์เปิด	ไม่เป็นทั้งสองอย่าง	ตัวแปร
1) เขาเป็นนักศึกษาระดับ ปวส. 1		✓		เขา
2) $3 + 5 = 8$	✓			
3) $x + 7 = 3$		✓		x
4) จงแก้สมการ $x^2 - 4x + 3 = 0$			✓	



การกำ-pra-โยคเปิดให้เป็นประพจน์

- 1) นำสมาชิกในeko-pa-sam-pat-r แทนที่ตัวแปรในประยุคเปิด เมื่อแทนค่าตัวแปรในประยุคเปิด จะทำให้ทราบค่าความจริงของ ประยุคนั้นได้ เช่น ประยุคเปิด $x + 3 > 4$ และ $U = \{0, 1, 2\}$
 - ถ้าแทน x ด้วย 0 จะได้ $0 + 3 > 4$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
 - ถ้าแทน x ด้วย 1 จะได้ $1 + 3 > 4$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
 - ถ้าแทน x ด้วย 2 จะได้ $2 + 3 > 4$ มีค่าความจริงเป็นจริง



การทำประโยชน์เปิดให้เป็นประโยชน์

2) เติมตัวบ่งปริมาณให้ครบทุกตัวแปร เช่น ทุก ๆ ค่า
ของ x ที่เป็นจำนวนจริง $x^2 - 1 \geq 0$

**ดังนั้น ประโยชน์เปิดสามารถทำให้เป็นประโยชน์ได้ต้อง^{จะ}ประกอบด้วย ประโยชน์เปิด เอกพสัมพัทธ์ และตัวบ่ง
ปริมาณ**

3 ตัวบ่งปริมาณ

① ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด (Universal Quantifier) ได้แก่ ตัวบ่งปริมาณที่มีความหมายเดียวกับ “สำหรับ...ทุกตัว” หรือ “ทุกๆ” เป็นต้น ซึ่งหมายถึง ต้องใช้ทุกสิ่งทุกอย่างในเอกภพสัมพัทธ์ (U) และใช้สัญลักษณ์ \forall (อ่านว่า for all) แทนตัวบ่งปริมาณทั้งหมด

เราใช้สัญลักษณ์ $\forall x$ แทน สำหรับทุกๆ x หรือสำหรับแต่ละ x

และถ้าให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิด เขียนแทนด้วย $\forall x[P(x)]$ แทน สำหรับ x ทุกตัวใน $P(x)$

ตัวอย่างเช่น สำหรับ x ทุกตัว ซึ่ง $x + 0 = x$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง

เขียนแทนด้วย $\forall x[x + 0 = x]$, $U = \mathbb{R}$ ถ้าให้ $P(x)$ แทน $x + 0 = x$

จะได้ $\forall x[P(x)]$, $U = \mathbb{R}$

3 ตัวบ่งปริมาณ

② ตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่ง (Existential Quantifier) ได้แก่ ตัวบ่งปริมาณที่มีความหมายเดียวกับ “สำหรับบาง...ตัว” หรือ “บาง” หรือ “มีอย่างน้อยหนึ่ง” ซึ่งหมายถึง อย่างน้อยหนึ่งสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ และใช้สัญลักษณ์ \exists (อ่านว่า for some) แทนตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่ง

เราใช้สัญลักษณ์ $\exists x$ แทน สำหรับ x บางตัว

และถ้าให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิด เขียนแทนด้วย $\exists x[P(x)]$ แทน สำหรับ x บางตัวใน $P(x)$

ตัวอย่างเช่น สำหรับ x ทุกตัว ซึ่ง $x + 2 = 0$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเต็ม

เขียนแทนด้วย $\exists x[x + 2 = 0]$, $U = \mathbb{Z}$ ถ้าให้ $P(x)$ แทน $x + 2 = 0$

จะได้ $\exists x[P(x)]$, $U = \mathbb{Z}$

4 ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณตัวแปรเดียว

① ค่าความจริงของประพจน์ $\forall x[P(x)]$

$\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x ทุกตัวใน U แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

$\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x อย่างน้อย 1 ตัวใน U แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ

4 ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณตัวแปรเดียว

② ค่าความจริงของประพจน์ $\exists x[P(x)]$

$\exists x[P(x)]$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง

ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x อย่างน้อย 1 ตัวใน U แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

$\exists x[P(x)]$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จ

ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x ทุกตัวใน U แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จทั้งหมด

(ไม่มีสมาชิกใน U แม้ตัวเดียวไปแทนค่า x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง)

สรุป

การอ้างเหตุผล คือ การพิจารณาว่า ถ้ามีเหตุ $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \dots \wedge P_n$ แล้วผล C ที่เกิดขึ้นนั้น อย่างสมเหตุสมผลหรือไม่ ซึ่งสามารถกระทำได้โดยใช้การตรวจสอบว่าเป็นสัจニรันดร์หรือไม่

ประโยชน์เปิด คือ ประโยชน์ของกอกเล่าหรือประโยชน์ปฏิเสธที่มีตัวแปร

ตัวบ่งปริมาณ แบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด และตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่งค่าความจริงของประพจน์

$\forall x[P(x)]$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อนำ x ทุกค่าใน U แทนใน $P(x)$ และ $P(x)$ เป็นจริง

$\forall x[P(x)]$ เป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อนำ x อย่างน้อย 1 ค่า ใน U แทนใน $P(x)$ และ $P(x)$ เป็นเท็จ

$\exists x[P(x)]$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อนำ x อย่างน้อย 1 ค่า ใน U แทนใน $P(x)$ และ $P(x)$ เป็นจริง

$\exists x[P(x)]$ เป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อนำ x ทุกค่าใน U แทนใน $P(x)$ และ $P(x)$ เป็นเท็จทั้งหมด