หน่วยที่

10

ฟังก์ชันพีชคณิต

คู่อันดับ (Ordered Pairs)

บทนิยาม

คู่อันดับ (a, b) = (c, d) ก็ต่อเมื่อ a = c และ b = d

คู่อันดับ (Ordered Pairs) เป็นการเขียนสัญลักษณ์แสดงการจับคู่ของสองสิ่งอยู่ในวงเล็บ ( ) โดยคั่นกลางแต่ละสิ่งด้วยเครื่องหมายจุลภาค โดยทั่วไปในวิชาคณิตศาสตร์นิยมเขียนคู่อันดับ (a, b) หรือ (x, y) ซึ่ง a หรือ x เป็นสมาชิกตัวหน้า b หรือ y เป็นสมาชิกตัวหลัง การเขียนสลับที่ระหว่างสมาชิก ตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังจะทำให้การแสดงการจับคู่นั้น เปลี่ยนไปจากเดิมนั่นคือ (a, b) $\neq$ (b, a)

ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

บทนิยาม

ให้ A และ B เป็นเซต ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B แทนด้วย $A \times B$ โดยที่ $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$

ตัวอย่าง

กำหนด A = {1, 2, 3} , B = {a, c}

จงหา A x B, B x A, A x A และ B x B

A x B = {(1, a), (1, c), (2, a), (2, c), (3, a), (3, c)}

B x A = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3)}

A x A = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}

B x B = {(a, a), (a, c), (c, a), (c, c)}

สิ่งที่ควรทราบเกี่ยวกับผลคูณคาร์ทีเซียน

1. $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$ และ $B = A$
2. ถ้า A มีสมาชิก m ตัว และ B มีสมาชิก n ตัว แล้ว $A \times B$ มีสมาชิก mn ตัว
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
5. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
6. ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$
7. ถ้า A เป็นเซตอนันต์, B เป็นเซตจำกัด $B \neq 0$ แล้ว $A \times B$ และ $B \times A$ เป็นเซตอนันต์

ความสัมพันธ์ (Relations)

บทนิยาม

ให้ A และ B เป็นเซต r เป็นความสัมพันธ์
จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นซับเซตของ A x B

ตัวอย่าง

กำหนด A = {x | x เป็นจำนวนเต็ม, 1 ≤ x ≤ x5}

และ B = {x | x เป็นจำนวนเต็ม}

จงเขียนเซตความสัมพันธ์ต่อไปนี้

(1) $r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x\}$

$r_1 = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), (5, 15)\}$

(2) $r_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2 + 1\}$

$r_2 = \{(1, 2), (2, 5), (3, 10), (4, 17), (5, 26)\}$

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

บทนิยาม

ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดเมนของ r เขียนแทนด้วย D_r

โดยที่ $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$ และเรนจ์ของ r แทนด้วย R_r

โดยที่ $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$

ตัวอย่าง

กำหนด r = {(x, y) | y = 3x - 2} จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

เนื่องจาก $y = 3x - 2$ ซึ่ง y อยู่ในรูปของ x อยู่แล้ว

D_r = {x | x เป็นจำนวนจริง}

การหาเรนจ์โดยเขียน x อยู่ในรูปของ y

จะได้ $x = \frac{y + 2}{3}$

R_r = {y | y เป็นจำนวนจริง}

ฟังก์ชัน (Function)

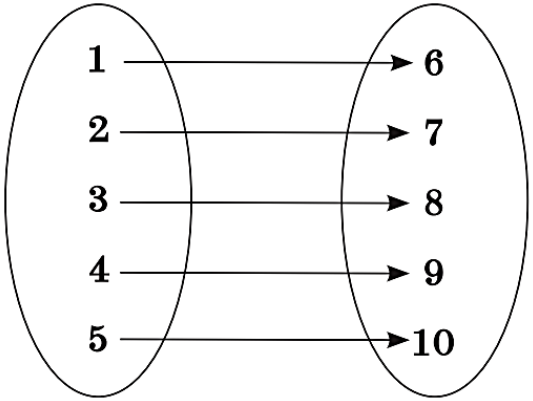
จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$r = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10)\}$$

และ $D_r = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R_r = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

เขียนแผนภาพแสดงการจับคู่ของโดเมนและเรนจ์ ดังนี้



ตัวอย่าง

จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 3\}$
2. $r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$
3. $r_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid y^2 = x + 4\}$

วิธีทำ

1. พิจารณา $y = 2x + 3$ แต่ละค่าของ x จะทำให้ได้ค่า y เพียงค่าเดียวเสมอ ดังนั้น r_1 เป็นฟังก์ชัน
2. พิจารณา $y = x^2$ แต่ละค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริง จะทำให้ได้ค่า y เพียงหนึ่งค่าเสมอ ดังนั้น r_2 เป็นฟังก์ชัน
3. พิจารณา $y^2 = x + 4$ ถ้า $x = 0$ จะได้

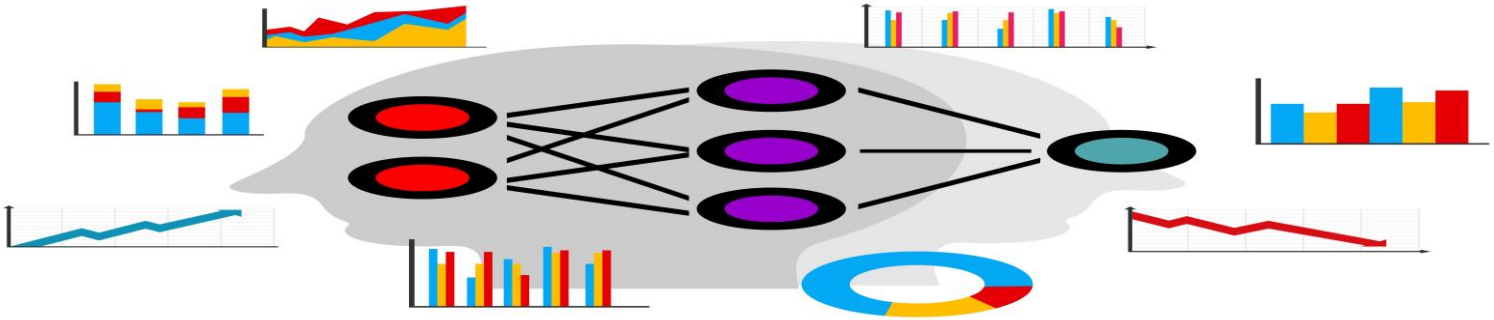
$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

นั่นคือ x หนึ่งค่าจะจับคู่กับ y สองค่า ความสัมพันธ์ r_3 จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

การตรวจสอบฟังก์ชันโดยกราฟ

การที่จะพิจารณาว่าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันหรือไม่โดยใช้กราฟ วิธีตรวจสอบสามารถทำได้โดย ลากเส้นขนานกับแกน y เส้นตรงจะตัดกราฟเพียงจุดเดียว จุดที่เส้นตรงตัดกราฟจะเป็นค่าของฟังก์ชันที่ x



ตัวอย่าง

จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 3\}$
2. $r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$
3. $r_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid y^2 = x + 4\}$

1. พิจารณา $y = 2x + 3$ แต่ละค่าของ x จะทำให้ได้ค่า y เพียงค่าเดียวเสมอ ดังนั้น r_1 เป็นฟังก์ชัน
2. พิจารณา $y = x^2$ แต่ละค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริง จะทำให้ได้ค่า y เพียงหนึ่งค่าเสมอ ดังนั้น r_2 เป็นฟังก์ชัน
3. พิจารณา $y^2 = x + 4$ ถ้า $x = 0$ จะได้

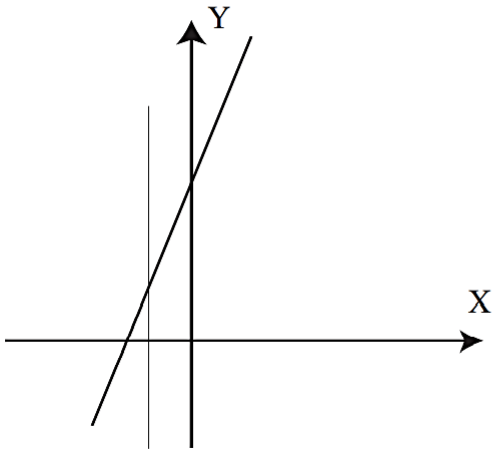
$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

นั่นคือ x หนึ่งค่าจะจับคู่กับ y สองค่า ความสัมพันธ์ r_3 จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

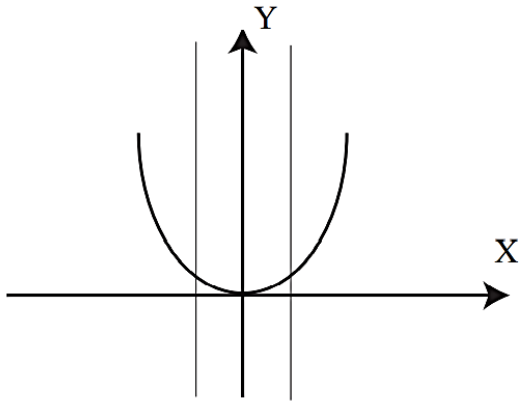
เขียนกราฟของความสัมพันธ์ดังนี้

(1) $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 3\}$



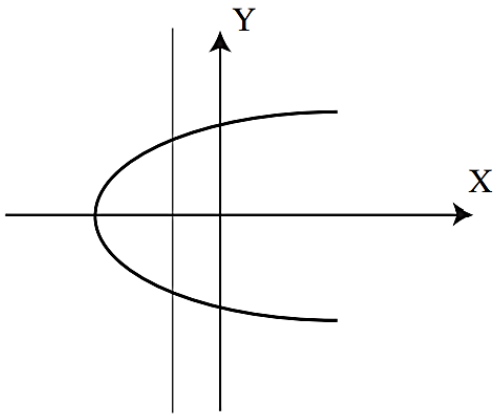
ลากเส้นขนานแกน y จะตัดกราฟเพียงจุดเดียว r_1 เป็นฟังก์ชัน

(2) $r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$



ลากเส้นขนานแกน y จะตัดกราฟเพียงจุดเดียว r_2 เป็นฟังก์ชัน

(3) $r_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid y^2 = x + 4\}$



ลากเส้นขนานแกน y จะตัดกราฟ 2 จุด

r_3 ไม่เป็นฟังก์ชัน

การดำเนินการของฟังก์ชัน

บทนิยาม

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน D_f และ D_g เป็นโดเมนของ f และ g ตามลำดับ

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ และ $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ และ $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) - g(x)$ และ $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
4. $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ และ $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) \neq 0\}$

ตัวอย่าง

กำหนด $f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 2), (4, 6)\}$

และ $g = \{(2, 1), (3, 0), (4, 2), (5, -1)\}$

จงหา $f + g$, $f - g$, $f\,g$ และ $\frac{f}{g}$

เนื่องจาก $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ มีโดเมนเป็น $D_f \cap D_g$

$$D_f \cap D_g = \{2, 3, 4\}$$

(1) $f + g = \{(2, 5 + 1), (3, 2 + 0), (4, 6 + 2)\}$

$= \{(2, 6), (3, 2), (4, 8)\}$

(2) $f - g = \{(2, 5 - 1), (3, 2 - 0), (4, 6 - 2)\}$

$= \{(2, 4), (3, 2), (4, 4)\}$

(3) $f \cdot g = \{(2, 5 \cdot 1), (3, 2 \cdot 0), (4, 6 \cdot 2)\}$

$= \{(2, 5), (3, 0), (4, 12)\}$

(4) เนื่องจาก $\frac{f}{g}$ มีโดเมนเป็น $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) \neq 0\}$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{3\}$$ (เนื่องจาก $g(3) = 0$)

$$= \{2, 4\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(2, \frac{5}{1}), (4, \frac{6}{2})\}$$

$$= \{(2, 5), (4, 3)\}$$