หน่วยที่ 3

การประยุกต์ใช้จำนวนเชิงซ้อนในงานอาชีพ

หัวข้อเรื่อง Topics

3.1 ความหมายของจำนวนเชิงซ้อน

3.2 การบวก ลบ คูณ หาร จำนวนเชิงซ้อน

3.3 สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

3.4 การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

3.5 การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

3.6 การประยุกต์ใช้จำนวนเชิงซ้อนในงานอาชีพ

เนื้อหาสาระ Content

3.1 ความหมายของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่เขียนอยู่ในรูป $a + bj$ เมื่อ a และ b คือ จำนวนจริงใด ๆ และ $j^2 = -1$ เรียก a ว่า ส่วนจริง เรียก b ว่า ส่วนจินตภาพ

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของสมการ $x^2 + 1 = 0$

วิธีทำ จาก $x + 1 = 0$

$$x^2 - (-1) = 0$$

$$x^2 - j^2 = 0$$

$$(x + j)(x - j) = 0$$

ดังนั้น $x = j$ หรือ $x = -j$ **ตอบ**

3.2 การบวก ลบ คูณ หาร จำนวนเชิงซ้อน

3.2.1 สมบัติเกี่ยวกับการบวกของจำนวนเชิงซ้อน

1. สมบัติปิด

ถ้า Z_1 และ Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า $Z_1 + Z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

2. สมบัติการสลับที่

ถ้า Z_1 และ Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$

3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

ถ้า Z_1, Z_2 และ Z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$

4. การมีเอกลักษณ์การบวก

(0, 0) เป็นเอกลักษณ์การบวกของจำนวนเชิงซ้อน (a, b)

เนื่องจาก $(0, 0) + (a, b) = (a, b)$

5. การมีอินเวิร์สการบวก

(–a, –b) เป็นอินเวิร์สการบวกของจำนวนเชิงซ้อน (a, b)

เนื่องจาก $(-a, -b) + (a, b) = (0, 0)$

3.2.2 สมบัติเกี่ยวกับการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

1. สมบัติปิด

ถ้า Z_1 และ Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า $Z_1 \quad Z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

2. สมบัติการสลับที่

ถ้า Z_1 และ Z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า $Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$

3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

ถ้า Z_1, Z_2 และ Z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า $(Z_1 \cdot Z_2) \cdot Z_3 = Z_1 \cdot (Z_2 \cdot Z_3)$

4. การมีเอกลักษณ์การคูณ

(1, 0) เป็นเอกลักษณ์การคูณของจำนวนเชิงซ้อน (a, b) เนื่องจาก (1, 0) (a, b) = (a, b)

5. การมีอินเวิร์สการคูณ

ถ้า $Z = (a, b) \neq (0, 0)$ จะได้ว่า

อินเวิร์สการคูณของ Z คือ $Z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

ตัวอย่าง จากจำนวนเชิงซ้อน $Z_1 = 4 + 3j$ และ $Z_2 = 2 - j$

จงหา

1. $Z_1 + Z_2$
2. $Z_1 - Z_2$

วิธีทำ

1. $Z_1 + Z_2 = (4 + 2) + (3 + (-1))j$

   $Z_1 + Z_2 = 6 + 2j$ **ตอบ**

2. $Z_1 - Z_2 = (4 - 2) + (3 - (-1))j$

   $Z_1 - Z_2 = 2 + 4j$ **ตอบ**

3.3 สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $Z = a + bj$

สังยุคของ Z เขียนแทนด้วย $Z = a - bj$

ตัวอย่าง ถ้า $Z_1 = 2 - j$ และ $Z_2 = -3 + 2j$

วิธีทำ 1. จาก $\overline{Z}_1 = 2 + j$

$\overline{Z}_2 = -3 - 2j$

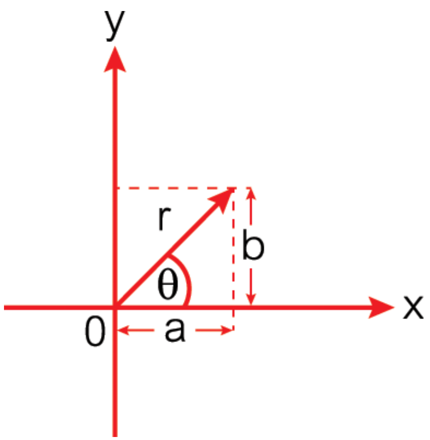
$\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 = (2 + (-3)) + (1+(-2))j$

$\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 = -1 - j$ **ตอบ**

2. $\overline{Z}_1 - \overline{Z}_2 = (2 - (-3)) + (1 - (-2))j$

$\overline{Z}_1 - \overline{Z}_2 = 5 + 3j$ **ตอบ**

3.4 การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว



จากรูปจะได้ $a = r\cos\theta$

$b = r\sin\theta$

ดังนั้น $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\tan\theta = b/a$

$Z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$

ตัวอย่าง จงเขียน Z = 3 + 3j ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ $a = 3, b = 3$

$$r = \sqrt{3^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{18}$$

$$r = 3\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = 3/3 = 1$$

$$\theta = \tan^{-1}(1)$$

$$= 45^{o}$$

แทนใน $Z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$

$$= (\cos 45^{o} + j\sin 45^{o})$$ **ตอบ**

3.5 การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ถ้า $Z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + j\sin \theta_1)$

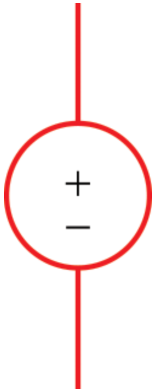
$Z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + j\sin \theta_2)$

จะได้ $Z_1Z_2 = r_1r_2 (\cos (\theta_1+\theta_2) + j\sin (\theta_1+\theta_2))$

$Z_1/Z_2 = r_1/r_2 (\cos (\theta_1-\theta_2) + j\sin (\theta_1-\theta_2))$

3.6 การประยุกต์ใช้จำนวนเชิงซ้อนในงานอาชีพ

ความรู้ในเรื่องจำนวนเชิงซ้อนมีประโยชน์อย่างมากในทางวิศวกรรม โดยเฉพาะสาขาวิชาช่างไฟฟ้า เนื่องจากต้องนำมาใช้คำนวณโจทย์ที่เกี่ยวกับวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ แต่หนังสือเล่มนี้เป็นวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานที่ทุกสาขาวิชาในระดับ ปวส. ไม่ว่าจะเป็นสายช่างสาขาอื่น ๆ เช่น ช่างยนต์ ช่างเชื่อมหรือสายพาณิชย์



เป็นสัญลักษณ์ของแหล่งจ่ายแรงดัน

มีสูตร	คือ	v	=	$V_m \cos(\omega t + \theta)$	มีหน่วยเป็น โวลต์ (V)
	โดยที่	V_m	=	แรงดันไฟฟ้าสูงสุด	มีหน่วยเป็น โวลต์ (V)
		ω	=	ความเร็วเชิงมุม	มีหน่วยเป็น เรเดียนต่อวินาที (rad/s)
		t	=	เวลา	มีหน่วยเป็น วินาที (s)
		θ	=	มุมเฟส	มีหน่วยเป็น องศาหรือเรเดียน

เป็นสัญลักษณ์ของตัวต้านทาน (R)

มีสูตร	คือ	Z	=	R	มีหน่วยเป็น โอห์ม (Ω)
	โดยที่	Z	=	ความต้านทานเชิงซ้อน	มีหน่วยเป็น โอห์ม (Ω)
		R	=	ความต้านทาน	มีหน่วยเป็น โอห์ม (Ω)

เป็นสัญลักษณ์ของตัวเหนี่ยวนำ (L)

มีสูตร	คือ	Z	=	$j\omega L$	มีหน่วยเป็น โอห์ม (Ω)
	โดยที่	Z	=	ความต้านทานเชิงซ้อน	มีหน่วยเป็น โอห์ม (Ω)
		L	=	ค่าความเหนี่ยวนำ	มีหน่วยเป็น เฮนรี่ (H)j=หนึ่งหน่วยจินตภาพ

เป็นสัญลักษณ์ของตัวเก็บประจุ (C)

มีสูตร คือ $Z = 1/j\omega C = -j\omega c$ มีหน่วยเป็น โอห์ม (Ω)

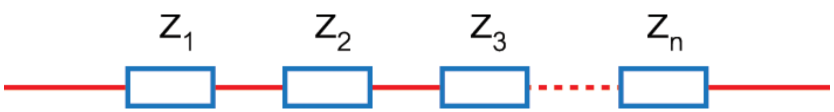
โดยที่ Z = ความต้านทานเชิงซ้อน มีหน่วยเป็น โอห์ม (Ω)

C = ค่าความจุไฟฟ้า มีหน่วยเป็น ฟารัด (F)

การหาความต้านทานเชิงซ้อนรวม

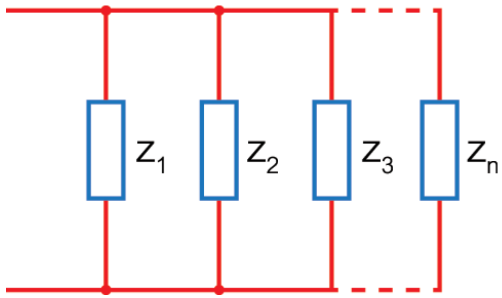
การหาความต้านเชิงซ้อนรวมสามารถหาได้ดังนี้

1.โดยวิธีการต่ออนุกรม



$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_n$$

2.โดยวิธีการต่อขนาน



$$1/Z = 1/Z + 1/Z_2 + 1/Z_3 + \ldots + 1/Z_n$$

หมายเหตุ ถ้าเป็นการต่อกันแค่ 2 ตัว สามารถใช้สูตรลัด คือ $Z = (Z_1Z_2)/(Z_1 + Z_2)$

หรือเทคนิคการจำสูตรง่าย ๆ คือ ผลคูณหารผลบวก