หน่วยที่ 5

การประยุกต์ใช้แคลคูลัสในงานอาชีพ

หัวข้อเรื่อง Topics

- 5.1 ลิมิต
- 5.2 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร
- 5.3 การประยุกต์การหาอนุพันธ์ในงานอาชีพ
- 5.4 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต
- 5.5 การประยุกต์อินทิกรัลไม่จำกัดเขตในงานอาชีพ

เนื้อหาสาระ Content

5.1 ลิมิต

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ อ่านว่า ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ อ่านว่า ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย

a

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ อ่านว่า ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา

a

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ จะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\lim_{x \to 1} (x^2 - 2x + 5)$

วิธีทำ $\lim_{x \to 1} (x^2 - 2x + 5) = (1)^2 - 2(1) + 5$

$= 4$ **ตอบ**

5.2 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร

กำหนดฟังก์ชัน U = f(x) และ v = g(x) c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ n เป็นจำนวนจริง ถ้า U และ V มีอนุพันธ์ที่ x

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $y = 5x^2 + 3x + 7 - 3/x + 4/x^2$

วิธีทำ $y' = dy/dx = d/dx\,(5x^2 + 3x + 7 - 3/x + 4/x^2)$

$$= 5\frac{d}{dx}(x^2) + 3\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(7) - 3\frac{d}{dx}(1/x) + 4\frac{d}{dx}(1/x^2)$$

$$= 5(2x) + 3(1) + 0 - 3(-1/x^2) + 4(-2/x^2)$$

$$y' = 10x + 3 + 3/x^2 - 8/x^3$$

ตอบ

5.3 การประยุกต์การหาอนุพันธ์ในงานอาชีพ

5.3.1 ความเร็วและความเร่ง

นิยาม เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง และทราบตำแหน่งของวัตถุขณะเวลาต่าง ๆ สามารถคำนวณหาความเร็วเฉลี่ยของวัตถุได้

ตัวอย่าง จากสมการการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง $s = 160t - 8t^2$

จงหา การกระจัด ความเร็ว ความเร่ง ที่ $t = 4$ วินาที

วิธีทำ จาก $s(t) = 160t - 8t^2$

หา $v(t) = d/dt\ s(t) = 160 - 16t$

$a(t) = d/dt\ v(t) = -16$

แทน $t = 4$ วินาที ในสมการ

จะได้ $s(4) = 160(4) - 8(4)^2 = 512$ m **ตอบ**

$v(4) = 160 - 16(4) = 96$ m/s **ตอบ**

$a(4) = -16$ m/s^2 **ตอบ**

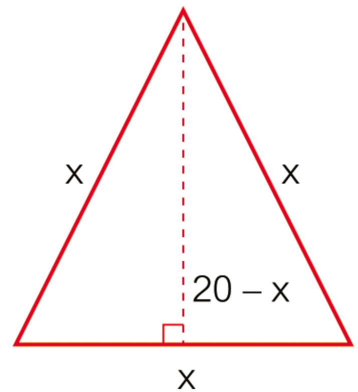
5.3.2 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดมีขั้นตอนดังนี้

1. พิจารณาว่าโจทย์ต้องการหาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของอะไร และให้เป็นตัวแปร y
2. ตัวแปรที่มีการเปลี่ยนแปลง ให้เป็นตัวแปร x (ตัวแปรต้น)
3. สร้างฟังก์ชันให้อยู่ในรูป $y = f(x)$
4. หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดตามที่โจทย์ต้องการ

ตัวอย่าง ถ้าต้องการสร้างรูปสามเหลี่ยม ที่มีความยาวด้านละ x เมตร และมีความสูง 20 – x เมตร ถ้าต้องการให้ได้พื้นที่มากที่สุด จะมีค่าเท่ากับเท่าไร

วิธีทำ



จากโจทย์แสดงว่า ฐานมีความยาว $=$ x เมตร

มีความสูง $=$ $20 - x$ เมตร

ให้ $f(x) =$ พื้นที่ของสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

$$= \frac{1}{2}(x)(20 - x)$$

$$f(x) = 10x - 0.5\,x$$

หาอนุพันธ์ $f\,(x) = 10 - x$

ให้ $f'\,(x) = 0$ จะได้ $10 - x = 0$

$$x = 10$$

5.4 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต

การอินทิเกรต เป็นกระบวนการย้อนกลับหรืออินเวอร์สของการหาอนุพันธ์ ซึ่งจะแทนด้วยเครื่องหมาย $\int$ เช่น ถ้าต้องการอินทิเกรตฟังก์ชัน $y = f(x)$ จะเขียนได้ในรูป $\int f'(x)dx$

โดยที่ $\int f'(x)dx = f(x) + c$; c = ค่าคงที่

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int(2x^3 - 4x^2 + 5)dx$

วิธีทำ

$$\int(2x^3 - 4x^2 + 5)dx = \int 2x^3\,dx - \int 4x^2\,dx + \int 5dx$$

$$= 2\int x^3dx - 4\int x^2dx + 5\int dx$$

$$2\frac{x^{3+1}}{3+1} - 4\frac{x^{2+1}}{2+1} + 5\frac{x^{0+1}}{0+1}$$

$$2\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 5x + c$$

$$\int(2x^3 - 4x^2 + 5)dx = \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + 5x + c$$

ตอบ

5.5 การประยุกต์อินทิกรัลไม่จำกัดเขตในงานอาชีพ

5.5.1 การกระจัดและความเร็ว

สูตรการหาการกระจัด คือ $v = \int a(t)dt$

สูตรการหาความเร็ว คือ $s = \int v(t)dt$

โดยที่ $s(t)$ = การกระจัดเมื่อเวลา t ใด ๆ

$v(t)$ = ความเร็วเมื่อเวลา t ใด ๆ

$a(t)$ = ความเร่งเมื่อเวลา t ใด ๆ

ตัวอย่าง เมื่อเวลา t ใด ๆ รถยนต์คันหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง $-3t$ m/s^2 ขณะที่เริ่มต้นจับเวลาวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 10 m/s และได้ระยะทาง 4 m จงหาสมการการเคลื่อนที่ของรถยนต์คันนี้

วิธีทำ จากโจทย์ $a(t) = -3t$

จะได้ $v = \int a(t)dt$

$= \int -3t\, dt$

$v(t) = -1.5t^2 + c$ **สมการ 1**

เมื่อ $t = 0$ (เริ่มต้นจับเวลา), $v = 10$ m/s

$10 = 0 + c$

$c = 10$ แทนใน สมการ 1

$v(t) = -1.5t^2 + 10$

จาก $s = \int v(t)dt$

จะได้ $s = \int(-1.5t^2 + 10)dt$

$s(t) = -0.5t^3 + 10t + c$ **สมการ 2**

เมื่อ $t = 0$ (เริ่มต้นจับเวลา), $s = 4$ m

$$4 = 0 + 0 + c$$

$c = 4$ แทนใน สมการ 2

ดังนั้น $s(t) = -0.5t^3 + 10t + 4$ **ตอบ**

5.5.2 การประยุกต์อื่น ๆ

ตัวอย่าง โรงงานแห่งหนึ่งผลิตสินค้าไปจำหน่าย โดยอัตราการเปลี่ยนแปลงของกำไรต่อจำนวนสินค้าที่ผลิตเท่ากับ $20 - x$ ต่อชิ้น เมื่อ x คือ จำนวนสินค้าที่ผลิต จงหากำไรที่โรงงานแห่งนี้จะได้รับเมื่อทำการผลิตสินค้า 10 ชิ้น

วิธีทำ จากโจทย์ $f'(x) = 20 - x$

และให้ $f(x)$ แทน กำไร

จาก $f(x) = \int f'(x)dx$

จะได้ $f(x) = \int (20 - x)dx$

$f(x) = 20x - 0.5x^2 + c$ **สมการ 1**

ถ้ายังไม่ผลิต (x = 0), ก็จะยังไม่มีกำไร (f(x) = 0)

$$0 = 0 - 0 + c$$

$$c = 0$$

แทนใน สมการ 1

$$f(x) = 20x - 0.5x$$

กำไรเมื่อทำการผลิตสินค้า 10 ชิ้น (x = 10)

ดังนั้น จะกำไร$f(x) = 20(10) - 0.5(10)$

$= 200 - 50$

$= 150$ บาท **ตอบ**