หน่วยที่ 6

การใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

หัวข้อเรื่อง Topics

- 6.1 ความหมายของดีเทอร์มิแนนต์
- 6.2 สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์
- 6.3 การหาดีเทอร์มิแนนต์
- 6.4 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์
- 6.5 การประยุกต์ดีเทอร์มิแนนต์ในงานอาชีพ

เนื้อหาสาระ Content

6.1 ความหมายของดีเทอร์มิแนนต์

ดีเทอร์มิแนนต์ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของเมตริกซ์จัตุรัส และมีเรนจ์เป็นเซตของจำนวนจริง ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A หรือ detA

6.2 สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

ดีเทอร์มิแนนต์มีสมบัติดังนี้

1. การสลับแถว 2 แถว (หลัก) ของเมตริกซ์ A จะทำให้ detA เปลี่ยนเครื่องหมายเป็นตรงข้าม สามารถเขียนได้โดย detA = –detB

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det A = 42$

สลับแถวที่ 1 และแถวที่ 3 ของเมตริกซ์ A จะได้

$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det B = -42$

2. ถ้าสมาชิก 2 แถว (หลัก) ใด ๆ ของเมตริกซ์ A เหมือนกัน จะได้ว่า detA = 0

เช่น $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

3. ถ้าสมาชิกของแถว (หลัก) ใด ๆ เป็น 0 ทั้งหมด จะได้ว่า detA = 0

เช่น $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

4. ถ้า A เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมขนาด n × n จะได้ว่า detA จะเท่ากับผลคูณของสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุม เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \ \det A = 1 \times 4 \times 6 = 24$$

5. ถ้าเมตริกซ์ B เกิดจากคูณแถว (หลัก) ใด ๆ ของเมตริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง c แล้ว จะได้ว่า detB = cdetA

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \ \det A = 1 \times 4 \times 6 = 24$

นำจำนวนจริง c คือ 4 ไปคูณแถวที่ 1 ของเมตริกซ์ A ทั้งแถว จะได้

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \ \det B = 4 \times 4 \times 6 = 96$$

หรือ $\det B = c\det A = 4 \times 24 = 96$

6. ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสแล้ว จะได้ว่า $\det AB = \det A \det B$

7. ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส และ k เป็นจำนวนจริงแล้ว จะได้ว่า $\det (kA) = k^n \det A$

8. $\det (An) = (\det A)$ โดยที่ n คือ จำนวนเต็มบวก

6.3 การหาดีเทอร์มิแนนต์

การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์จัตุรัสที่มีมิติไม่เกิน 3 × 3 มีวิธีการหาดังนี้

6.3.1 เมตริกซ์ที่มีมิติ 2 × 2

เช่น $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-}_{+}$$

ทแยงลงเป็นบวก ทแยงขึ้นเป็นลบ

$= ad - bc$

6.3.2 เมตริกซ์ที่มีมิติ 3 × 3

เช่น A $= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

จะต่อหลักออกไป 2 หลัก

$$- \quad - \quad -$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right.$$

$$+ \quad + \quad +$$

ทแยงลงเป็นบวก ทแยงขึ้นเป็นลบ

$= aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

6.4 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์

ถ้า A เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติ n × n และ detA ไม่เท่ากับ 0 ระบบสมการเชิงเส้นจะอยู่ในรูปของ *$Ax = B$*

โดยที่ x = เมตริกซ์ของตัวแปร $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, = B = เมตริกซ์ค่าคงที่ = $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์ คือ

$x = \text{det}A/\text{det}A,\ x = \text{det}A/\text{det}A, \dots,\ x_n = \text{det}A_n/\text{det}A$

เมื่อ A คือ เมตริกซ์ที่เกิดจากการแทนหลักที่ i ทั้งหลัก ด้วย เมตริกซ์ B

6.5 การประยุกต์ดีเทอร์มิแนนต์ในงานอาชีพ

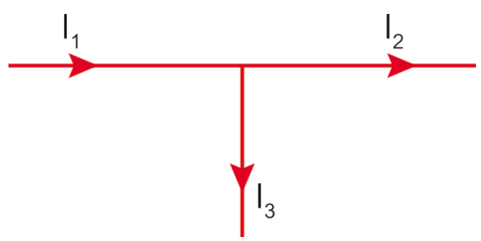
กฎของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchoff's Law)

ในวงจรไฟฟ้าที่ความซับซ้อน บางครั้งการใช้กฎของโอห์มเพียงอย่างเดียวจะทำให้ยุ่งยากมาก นักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน ชื่อ กุสสตาฟ เคอร์ชอฟฟ์ ได้ทำวิทยานิพนธ์ปริญญาเอก เพื่อใช้คำนวณในวงจรที่มีความซับซ้อน เรียกว่า กฎของเคอร์ชอฟฟ์

กฎของเคอร์ชอฟฟ์ ***มี 2 ข้อหลัก คือ***

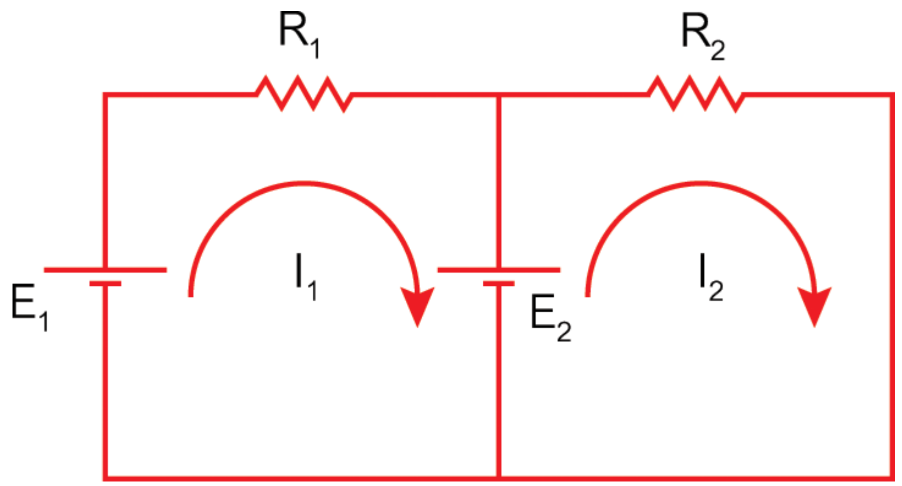
1. กฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ คือ กระแสไฟฟ้าที่ไหลเข้าจุดใดจุดหนึ่งในวงจรไฟฟ้า จะเท่ากับกระแสไฟฟ้าที่ไหลออกจากจุดนั้น

จากรูป $I_1 = I_2 + I_3$



$$\sum I_{\text{เข้า}} = \sum I_{\text{ออก}}$$

2. กฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ คือ ผลบวกของแรงดันไฟฟ้าที่จ่ายให้ในวงจรไฟฟ้าปิดจะมีค่าเท่ากับผลบวกของแรงดันไฟฟ้าตกคร่อมความต้านทานในวงจรไฟฟ้าปิดนั้น

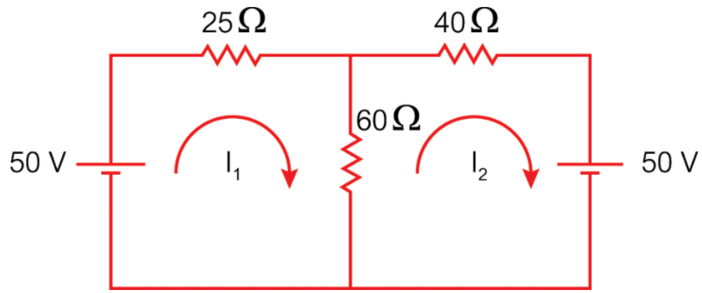


จากรูป

Loop 1 ; $I_1 R_2 + E_2 - E = 0$

Loop 2 ; $I_2 R_2 - E_2 = 0$

ตัวอย่าง จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหากระแสไฟฟ้าในแต่ละเส้นของวงจร



วิธีทำ กำหนดให้loop 1 มีกระแสไฟฟ้าหลัก I_1 และสมมติให้มีทิศ ตามเข็มนาฬิกา

loop 2 มีกระแสไฟฟ้าหลัก I_2 และสมมติให้มีทิศ ตามเข็มนาฬิกา

loop 1 ; $I_1(25 + 60) - I_2(60) - 50 = 0$

$85I_1 - 60I_2 = 50$

$17I_1 - 12I_2 = 10$ **สมการ 1**

loop 2 ; $I_2(60 + 40) - I_1(60) + 75 = 0$

$-60I_1 + 100I_2 = -75$

$-12I_1 + 20I_2 = -15$ **สมการ 2**