หน่วยที่ 5

การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง

แนวคิด

การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง เป็นการหาค่ากลางที่เป็นตัวแทนของข้อมูลทั้งหมด เพื่อสรุปเรื่องราวที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลนั้นๆ ได้อย่างสะดวกและรวดเร็ว การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางมีวิธีหาได้หลายวิธีแต่ที่นิยมกันมีอยู่ 3 ชนิด คือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ฐานนิยม และมัธยฐาน

สัญลักษณ์แสดงผลบวก

ก่อนที่จะศึกษาการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ในที่นี้ควรทำความเข้าใจในการใช้สัญลักษณ์แสดงผลบวกดังรายละเอียดต่อไปนี้

การใช้สัญลักษณ์ "Σ" เป็นอักษรกรีก อ่านว่า "ซิกมา" (Sigma) หรือ "ซัมเมชัน" (Summation) แทนสัญลักษณ์แสดงผลบวก

ถ้าให้ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ แทนค่าสังเกตแต่ละตัวของข้อมูลชุดหนึ่ง

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ แทนผลบวกของ x_i ทุกๆ ค่า ตั้งแต่ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$

เช่น $\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_{10}^2 = \sum_{i=1}^{10} y_i^2$ เป็นต้น

สัญลักษณ์แสดงผลบวก

สมบัติของ Σ ที่ควรทราบ เมื่อ x, y เป็นตัวแปร และ c, d เป็นค่าคงที่

1. $$\sum_{i=1}^{n} c = cn$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

3. $$\sum_{i=1}^{n} \left(cx_i + d\right) = c\sum_{i=1}^{n} x_i + nd$$

4. $$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i + y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

5. $$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i$$

สัญลักษณ์แสดงผลบวก

ตัวอย่าง

1. $\sum_{i=1}^{10} 5 = 5(10) = 50$

2. กำหนดให้ $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 2, x_4 = 1$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

3. กำหนดให้ $x_1 = 4,\ x_2 = -3, x_3 = 2, x_4 = 3$ จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{4} 5x_i$

$$\sum_{i=1}^{4} 5x_i = 5\sum_{i=1}^{4} x_i$$

$$= 5\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$= 5[4 + (-3) + 2 + 3] = 5(6)$$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{4} 5x_i = 30$

สัญลักษณ์แสดงผลบวก

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์แสดงผลบวก

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_5^2$
2. $x_2y_2 + x_3y_3 + \ldots + x_{15}y_{15}$
3. $az_1 + az_2 + az_3 + \ldots + az_k$

วิธีทำ

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_5^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2$
2. $x_2y_2 + x_3y_3 + \ldots + x_{15}y_{15} = \sum_{i=2}^{15} x_iy_i$
3. $az_1 + az_2 + az_3 + \ldots + az_k = \sum_{i=1}^{k} az_i$ หรือ $a\sum_{i=1}^{k} z_i$

สัญลักษณ์แสดงผลบวก

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $x_1 = 4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$ จงหาค่าของ

1) $\sum_{i=1}^{4} 2x_i$ 2) $\sum_{i=2}^{4} x_i^3$

วิธีทำ

1) $$\sum_{i=1}^{4} 2x_i = 2\sum_{i=1}^{4} x_i$$
$$= 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$
$$= 2[4 + (-1) + 0 + 3]$$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{4} 2x_i = 12$

2) $$\sum_{i=2}^{4} x_i^3 = x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$$
$$= (-1)^3 + (0)^3 + (3)^3$$
$$= (-1) + 27$$

ดังนั้น $\sum_{i=2}^{4} x_i^3 = 26$

สัญลักษณ์แสดงผลบวก

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 8,\ x_4 = 6$

$f_1 = 5,\ f_2 = 6,\ f_3 = 4$ และ $c = 10$

จงหาค่าของ

1) $\sum_{i=1}^{4}(x_i - 6)^2$ 2) $\sum_{i=1}^{3}(f_i x_i + c)$

วิธีทำ

1) **วิธีที่ 1**

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}(x_i - 6)^2 &= (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 6)^2 + (x_3 - 6)^2 + (x_4 - 6)^2 \\ &= (2 - 6)^2 + (4 - 6)^2 + (8 - 6)^2 + (6 - 6)^2 \\ &= (-4)^2 + (-2)^2 + (2)^2 + 0 \\ &= 16 + 4 + 4\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{4}(x_i - 6)^2 = 24$

สัญลักษณ์แสดงผลบวก

วิธีที่ 2 $\sum_{i=1}^{4}(x_i-6)^2 = \sum_{i=1}^{4}(x_i^2 - 12x_i + 36)$

$= \sum_{i=1}^{4}x_i^2 - \sum_{i=1}^{4}12x_i + \sum_{i=1}^{4}36$

$= \sum_{i=1}^{4}x_i^2 - 12\sum_{i=1}^{4}x_i + (4 \times 36)$

$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - 12(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 144$

$= (2^2 + 4^2 + 8^2 + 6^2) - 12(2 + 4 + 8 + 6) + 144$

$= 120 - (12 \times 20) + 144$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{4}(x_i-6)^2 = 24$

2) $\sum_{i=1}^{3}(f_ix_i + c) = \sum_{i=1}^{3}f_ix_i + \sum_{i=1}^{3}c$

$= (f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3) + 3c$

$= (5 \times 2) + (6 \times 4) + (4 \times 8) + (3 \times 10)$

$= 10 + 24 + 32 + 30$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{3}(f_ix_i + c) = 96$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmatic mean) เป็นค่ากลางของข้อมูลที่ใช้เป็นตัวแทนของข้อมูลและเป็นค่าที่นิยมใช้กันมากที่สุด

1 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตหาได้โดยการนำข้อมูลทุกค่ามารวมกันแล้วหารด้วยจำนวนข้อมูลทั้งหมด ถ้ากำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ แทนค่าของข้อมูลตัวที่ 1, 2, …, n ตามลำดับ และ N แทนจำนวนข้อมูลทั้งหมดแล้วจะได้

สูตร $$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{\sum x}{N}$$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 4 จงหาอายุเฉลี่ยของนักเรียนจำนวน 6 คนปรากฏผลดังนี้

18, 17, 16, 20, 18 และ 19 ปี

วิธีทำ จาก

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{18 + 17 + 16 + 20 + 18 + 19}{6}$$

$$\bar{x} = \frac{108}{6} = 18$$

ดังนั้น อายุเฉลี่ยของนักเรียนจำนวน 6 คนเท่ากับ 18 ปี

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตแบบถ่วงน้ำหนัก

การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตแบบถ่วงน้ำหนัก ในกรณีที่ข้อมูลแต่ละตัวมีความสำคัญหรือมีน้ำหนักไม่เท่ากัน เราจะหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตแบบถ่วงน้ำหนัก

ถ้าให้ $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k$ เป็นความสำคัญหรือน้ำหนักถ่วงของค่าของข้อมูล $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ ตามลำดับแล้วจะได้

สูตร $$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_kx_k}{w_1 + w_2 + \ldots + w_k}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_ix_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i}$$

เมื่อ x_i แทน ค่าของข้อมูลตัวที่ i

w_i แทน น้ำหนักของข้อมูลที่ i

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 5 จงคำนวณระดับคะแนนเฉลี่ยของสุชาดาเมื่อได้รับระดับคะแนนในแต่ละวิชาเป็นดังนี้

วิชา	ระดับคะแนน	หน่วยกิต
เศรษฐศาสตร์	3	2
คณิตศาสตร์	4	3
ภาษาไทย	3	2
พลศึกษา	4	1

วิธีทำ เนื่องจากแต่ละวิชามีจำนวนหน่วยกิต (น้ำหนักของข้อมูล)

ให้ x_i แทน ระดับคะแนนของวิชาที่ i

w_i แทน จำนวนหน่วยกิตของวิชา i

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

จากสูตร $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i}$

$w_1 = 2,\ w_2 = 3,\ w_3 = 2,\ w_4 = 1$

$x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4$

$$\bar{x} = \frac{(2 \times 3) + (3 \times 4) + (2 \times 3) + (1 \times 4)}{2 + 3 + 2 + 1}$$

$$\bar{x} = \frac{28}{8} = 3.5$$

ดังนั้น ระดับคะแนนเฉลี่ยของสุชาดาเท่ากับ 3.5

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม

การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม ข้อมูลเรื่องเดียวกันมีหลายชุด แต่ละชุดมีจำนวนข้อมูลไม่เท่ากัน และทราบค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลแต่ละชุด เราสามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวมของข้อมูลชุดนั้นได้ดังนี้

ถ้าให้ $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_k$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลแต่ละชุด

และ $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ เป็นจำนวนข้อมูลแต่ละชุด

สูตร

$$\bar{x}_{\text{รวม}} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + \ldots + n_k\bar{x}_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

$$\bar{x}_{\text{รวม}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 6 ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ปวช. 1 ซึ่งมี 3 ห้อง ได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคะแนนสอบและจำนวนนักเรียนในแต่ละห้องดังตารางด้านล่างนี้

ห้อง	1/1	1/2	1/3
ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	60	70	65
จำนวนนักเรียน	35	40	25

จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวมของคะแนนสอบทั้งสามห้อง

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

วิธีทำ จากสูตร

$$\bar{x}_{\text{รวม}} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

$$n_1 = 35,\ n_2 = 40,\ n_3 = 25$$

$$\bar{x}_1 = 60,\ \bar{x}_2 = 70,\ \bar{x}_3 = 65$$

$$\bar{x}_{\text{รวม}} = \frac{(35 \times 60) + (40 \times 70) + (25 \times 65)}{35 + 40 + 25}$$

$$= \frac{2,100 + 2,800 + 1,625}{100}$$

$$\bar{x}_{\text{รวม}} = \frac{6,525}{100} = 65.25$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวมของคะแนนสอบทั้งสามห้อง คือ 65.25 คะแนน

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

❷ การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลที่แจกแจงความถี่

ถ้าให้ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ เป็นค่าของข้อมูลตัวที่ 1, 2, 3, …, k

และ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k$ เป็นความถี่ของข้อมูลแต่ละตัว ตามลำดับ แล้วจะได้

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ

สูตร
$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_ix_i}{N}$$

ตัวอย่างที่ 7 จากตารางแจกแจงความถี่คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนจำนวน 30 คน จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนทั้งหมด

คะแนนสอบ	12	15	17	19	21	24
จำนวนนักเรียน	5	8	3	4	6	4

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

วิธีทำ

คะแนนสอบ (x_i)	จำนวนนักเรียน (f_i)	$f_i x_i$
12	5	60
15	8	120
17	3	51
19	4	76
21	6	126
24	4	96
	N = 30	$\sum_{i=1}^{6} f_i x_i$ **= 529**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} f_i x_i}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{529}{30} = 17.63$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนทั้งหมดเท่ากับ 17.63 คะแนน

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

กรณีข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้วถูกจัดให้เป็นอันตรภาคชั้น จึงใช้จุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้นนั้นเป็นตัวแทนของข้อมูลที่ดีและใกล้เคียงที่สุดในการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต โดยการนำผลคูณระหว่างจุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้นกับความถี่ของชั้นมารวมกันทุกชั้น แล้วนำผลรวมของข้อมูลทั้งหมดที่ได้หารด้วยผลรวมของความถี่ทั้งหมด การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต แบ่งออกเป็น 2 วิธี คือ

1 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตโดยวิธีตรง

ถ้ากำหนดให้ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k$ เป็นความถี่ของข้อมูล $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ เป็นจุดกึ่งกลางชั้นของข้อมูลในแต่ละชั้น และ k เป็นจำนวนชั้นของอันตรภาคชั้น แล้วจะได้

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + \ldots + f_k}$$

หรือ $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานอาชีพของนักเรียน 50 คน ซึ่งคะแนนสอบแจกแจงความถี่ได้ดังตารางต่อไปนี้

คะแนน	จำนวนนักเรียน (f_i)	จุดกึ่งกลางชั้น (x_i)	$f_i x_i$
48 - 52	2	50	100
53 - 57	2	55	110
58 - 62	2	60	120
63 - 67	4	65	260
68 - 72	5	70	350
73 - 77	7	75	525
78 - 82	4	80	320
83 - 87	7	85	595
88 - 92	9	90	810
93 - 97	8	95	760
	$N = \sum_{i=1}^{10} f_i = 50$		$\sum_{i=1}^{10} f_i x_i = 3,950$

วิธีทำ จากสูตร $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$

$$\bar{x} = \frac{3,950}{50} = 79$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานอาชีพ คือ 79 คะแนน

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 9 จากข้อมูลในตารางต่อไปนี้ จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของค่าจ้างรายวันของลูกจ้าง 65 คน ในบริษัทแห่งหนึ่ง

ค่าจ้าง (บาท)	จำนวนลูกจ้าง (คน)
140 - 144	8
145 - 149	10
150 - 154	16
155 - 159	14
160 - 164	10
165 - 169	5
170 - 174	2

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

วิธีทำ หาจุดกึ่งกลางชั้น แล้วนำจุดกึ่งกลางชั้นที่ได้ไปคูณกับความถี่ของข้อมูลในชั้นนั้น ดังตารางต่อไปนี้

ค่าจ้าง (บาท)	จำนวนลูกจ้าง (f_i)	จุดกึ่งกลางชั้น (x_i)	$f_i x_i$
140 - 144	8	142	1,136
145 - 149	10	147	1,470
150 - 154	16	152	2,432
155 - 159	14	157	2,198
160 - 164	10	162	1,620
165 - 169	5	167	835
170 - 174	2	172	344
	N = **65**		$\sum_{i=1}^{7} f_i x_i$ **= 10,035**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{10,035}{65} = 154.38$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของค่าจ้างรายวันของลูกจ้างในบริษัทแห่งนี้ คือ 154.38 บาท

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

❷ การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตโดยวิธีลัด (วิธีทอนค่าของข้อมูล)

ในกรณีที่ข้อมูลมีค่ามาก การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตโดยวิธีลัด เป็นการทอนค่าของข้อมูลให้น้อยลง นั่นคือ

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลที่ได้ทอนค่าน้อยลงแล้ว คือ

$$\bar{x} = a + I\bar{x}'$$

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i'}{N}$$

$$x_i' = \frac{x_i - a}{I}$$

a แทน จุดกึ่งกลางสมมุติของอันตรภาคชั้นใดชั้นหนึ่ง

I แทน ความกว้างของแต่ละอันตรภาคชั้น

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 10 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตโดยวิธีลัด

ค่าจ้าง (บาท)	จำนวนลูกจ้าง (f_i)	x_i	$x_i - a$	$x_i' = \frac{x_i - a}{I}$	$f_i x_i'$
140 - 144	8	142	-10	-2	-16
145 - 149	10	147	-5	-1	-10
150 - 154	16	a = 152	0	0	0
155 - 159	14	157	5	1	14
160 - 164	10	162	10	2	20
165 - 169	5	167	15	3	15
170 - 174	2	172	20	4	8
	N = 65				$\sum_{i=1}^{7} f_i x_i' = 31$

วิธีทำ จากสูตร $\bar{x} = a + I\bar{x}'$

ในที่นี้ a = 152, $I = 5$

$$\bar{x} = 152 + \left(5 \times \frac{31}{65}\right)$$

$$\bar{x} = 152 + 2.38$$

$$\bar{x} = 154.38$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของค่าจ้างรายวันของลูกจ้างในบริษัทแห่งนี้ คือ 154.38 บาท

ข้อสังเกต ในการเลือก a เป็นจุดกึ่งกลางสมมุติจะเลือกของอันตรภาคชั้นใดชั้นหนึ่งก็ได้ เพื่อสะดวกและง่ายต่อการคำนวณ โดยทั่วไปจะเลือกชั้นที่มีความถี่สูงสุด

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

สมบัติของค่าเฉลี่ยเลขคณิต

❶ ผลคูณของค่าเฉลี่ยเลขคณิตกับจำนวนข้อมูลทั้งหมดมีค่าเท่ากับผลรวมของข้อมูลทุก ๆ ค่า นั่นคือ

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} \quad \text{จะได้} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = N\bar{x}$$

❷ ผลรวมของผลต่างค่าของข้อมูลแต่ละตัวกับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนั้นจะมีค่าเท่ากับศูนย์เสมอ นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$$

❸ ผลรวมของกำลังสองของผลต่างระหว่างค่าของข้อมูลแต่ละตัวกับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้จะมีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 \text{ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ } a = \bar{x}$$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

❹ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดใดจะมีค่าอยู่ระหว่างค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของข้อมูลชุดนั้น นั่นคือ

$$x_{min} < \bar{x} < x_{max}$$

❺ ถ้านำเอาค่าคงที่ไปบวกหรือลบออกจากข้อมูลแต่ละตัว แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดใหม่จะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิตเดิมบวกหรือลบด้วยค่าคงที่นั้น นั่นคือ

$$\bar{x}_{\text{ใหม่}} = \bar{x}_{\text{เดิม}} \pm c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่

❻ ถ้านำเอาค่าคงที่ไปคูณหรือหารจากข้อมูลแต่ละตัว แล้วค่าเฉลี่ยของข้อมูลชุดใหม่จะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิตเดิมคูณหรือหารด้วยค่าคงที่นั้น นั่นคือ

$\bar{x}_{\text{ใหม่}} = c\bar{x}_{\text{เดิม}}$ หรือ $\bar{x}_{\text{ใหม่}} = \frac{1}{c}\bar{x}_{\text{เดิม}}$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่

❼ ถ้าตัวแปร y สัมพันธ์กับตัวแปร x ในรูปฟังก์ชันเส้นตรง นั่นคือ

$Y_i = ax_i + b \; ; i = 1, 2, 3, \ldots, N$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัวใดๆ

แล้ว $\bar{Y} = a\bar{x} + b$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 11 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล 100 จำนวนได้เท่ากับ 10 ต่อมาทราบว่าอ่านข้อมูลผิดไป 2 ค่า คือ ข้อมูลที่มีค่า 7 อ่านเป็น 1 และ 13 อ่านเป็น 18 ตามลำดับ จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่ถูกต้อง

วิธีทำ จาก $$\sum_{i=1}^{N} x_i = N\bar{x}$$

จะได้ $$\sum_{i=1}^{100} x_i \text{ ที่ผิด} = 100 \times 10 = 1{,}000$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_i \text{ ที่ถูกต้อง} = 1{,}000 + 7 - 1 + 13 - 18$$

$$= 1{,}001$$

$$\bar{x} \text{ ที่ถูกต้อง} = \frac{\sum_{i=1}^{100} x \text{ ที่ถูกต้อง}}{100}$$

$$= \frac{10{,}001}{100} = 10.01$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่ถูกต้องเท่ากับ 10.01

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 12 ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างราคาขาย (Y) และราคาซื้อ (x) ของราคาสินค้าชนิดหนึ่งเป็น $Y_i = 1.5x_i + 3$ ถ้าราคาซื้อของสินค้าดังกล่าวเป็น 80, 84, 70, 80, 73, 78, 82, 86, 79 และ 68 บาท ตามลำดับ จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของราคาขายของสินค้าชนิดนี้

วิธีทำ ความสัมพันธ์ระหว่างราคาซื้อและราคาขายของสินค้า คือ

$$Y_i = ax_i + b \; ; \; i = 1, 2, 3, \ldots, 10$$

$$Y_i = 1.5x_i + 3$$

แต่ $\overline{Y} = a\overline{x} + b$

$$\overline{x} = \frac{80 + 84 + 70 + 80 + 73 + 78 + 82 + 86 + 79 + 68}{100} = 78$$

$$\overline{Y} = 1.5\,(78) + 3 = 120$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของราคาขายของสินค้าชนิดนี้เท่ากับ 120 บาท

ฐานนิยม

ฐานนิยม (Mode) เป็นค่าของข้อมูลที่มีความถี่สูงสุดหรือมีจำนวนซ้ำกันมากที่สุด ในข้อมูลชุดหนึ่งๆ อาจมีฐานนิยมเพียงค่าเดียว มากกว่าหนึ่งค่า หรือไม่มีเลยก็ได้ ใช้สัญลักษณ์ Mo แทนฐานนิยม การหาฐานนิยมสามารถทำได้ดังนี้

1 การหาฐานนิยมของข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่

ให้พิจารณาค่าของข้อมูลที่มีความถี่สูงสุดหรือจำนวนซ้ำกันมากที่สุด ค่านั้นคือ ฐานนิยม

ตัวอย่างที่ 13 จงหาฐานนิยมของข้อมูลต่อไปนี้

1. 3, 3, 6, 8, 9, 9, 9, 10, 10
2. 2, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 8, 8
3. 4, 3, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 1

วิธีทำ

1. ฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้ คือ **9**
   เพราะข้อมูลชุดนี้มี 9 เป็นข้อมูลที่มีความถี่สูงสุด
2. ฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้ คือ **5** และ **8**
   เพราะข้อมูลชุดนี้มี 5 และ 8 เป็นข้อมูลที่มีความถี่เท่ากัน และความถี่สูงสุด
3. ฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้คือ **ไม่มีฐานนิยม**
   เพราะข้อมูลแต่ละค่ามีความถี่เท่ากันหมด

ฐานนิยม

ตัวอย่างที่ 14 จงหาฐานนิยมของเบอร์ของเสื้อผ้าสำเร็จรูปของผู้หญิง

เบอร์ของเสื้อผ้าสำเร็จรูป	32	34	36	38	40
จำนวน (โหล)	24	20	30	24	17

ดังนั้น ฐานนิยมของเบอร์ของเสื้อผ้าสำเร็จรูปของผู้หญิง คือ เบอร์ 36

2 การหาฐานนิยมของข้อมูลที่แจกแจงความถี่

ขั้นตอนการหาฐานนิยม มีดังนี้

1) เลือกชั้นของข้อมูลที่มีความถี่สูงสุดชั้นนั้น คือ "ชั้นฐานนิยม"

2) คำนวณหาโดยใช้สูตรดังนี้

$$\text{ฐานนิยม} = L_0 + I\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

เมื่อ L_0 คือ ขอบล่างหรือขีดจำกัดล่างแท้จริงของชั้นที่มีความถี่สูงสุด (ชั้นที่มีฐานนิยมอยู่)

I คือ ความกว้างของอันตรภาคชั้น

d_1 คือ ผลต่างระหว่างความถี่ของชั้นฐานนิยมกับชั้นที่มีข้อมูลต่ำกว่า

d_2 คือ ผลต่างระหว่างความถี่ของชั้นฐานนิยมกับชั้นที่มีข้อมูลสูงกว่า

ฐานนิยม

ตัวอย่างที่ 15 จากตารางแจกแจงความถี่ต่อไปนี้ จงหาฐานนิยมของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของนักเรียน 50 คน

คะแนนสอบ	จำนวนนักเรียน
48 - 52	2
53 - 57	2
58 - 62	2
63 - 67	4
68 - 72	5
73 - 77	7
78 - 82	4
83 - 87	7
88 - 92	9*
93 - 97	8

ชั้นฐานนิยม

ฐานนิยม

วิธีทำ

1. ชั้นฐานนิยม คือ อันตรภาคชั้น 88 - 92

2. ถ้า $L_0 = 87.5$ $\quad I = 92.5 - 87.5 = 5$

$d_1 = 9 - 7 = 2$ $\quad d_2 = 9 - 8 = 1$

แทนค่าในสูตรจะได้

$$\text{ฐานนิยม} = L_0 + I\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

$$= 87.5 + 5\left(\frac{2}{2+1}\right)$$

$$= 87.5 + 3.33$$

$$= 90.83$$

ดังนั้น ฐานนิยมของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน คือ 90.83 คะแนน

ฐานนิยม

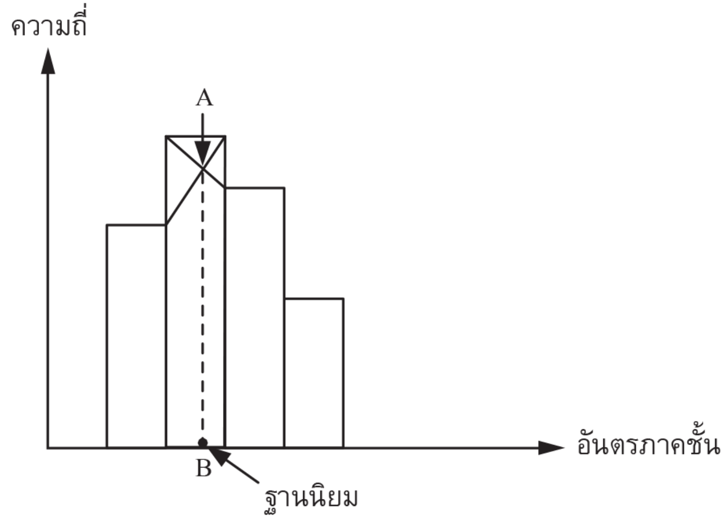
การหาฐานนิยมจากกราฟฮิสโทแกรม ทำได้ดังนี้

❶ เขียนกราฟฮิสโทแกรม

❷ ลากเส้นเชื่อมขอบของแท่งสี่เหลี่ยมที่สูงที่สุดกับขอบของแท่งที่อยู่ต่อกันทั้ง 2 ด้าน ให้ส่วนของเส้นตรงตัดกันที่จุด A

❸ จากจุด A ลากเส้นตรงขนานกับแกนตั้ง ให้ตัดแกนนอนที่จุด B

❹ ค่าของแกนนอนที่จุด B เป็นค่าฐานนิยม ดังรูป



มัธยฐาน

มัธยฐาน (Median) คือ ค่าที่มีตำแหน่งอยู่ตรงกลางของข้อมูล เมื่อนำข้อมูลทั้งหมดมาเรียงลำดับจากน้อยไปมาก หรือจากมากไปน้อย ซึ่งค่านี้จะแบ่งข้อมูลชุดนั้นออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน ดังนั้นจึงมีข้อมูลที่มากกว่าหรือน้อยกว่าค่ามัธยฐานอยู่ประมาณเท่า ๆ กัน

ใช้สัญลักษณ์ Med หรือ Me แทน มัธยฐาน

1 การหามัธยฐานของข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่

ขั้นตอนการหาค่ามัธยฐานดังนี้

1. เรียงลำดับข้อมูลทั้งหมดจากน้อยไปมาก หรือจากมากไปน้อย
2. หาตำแหน่งของมัธยฐานที่ $\frac{N + 1}{2}$ เมื่อ N แทน จำนวนข้อมูลทั้งหมด
3. พิจารณาตำแหน่งของมัธยฐานจากข้อมูลที่เรียงลำดับ ดังนั้น

มัธยฐาน คือ ค่าของข้อมูลในตำแหน่งที่ $\frac{N + 1}{2}$

มัธยฐาน

ตัวอย่างที่ 16 จากข้อมูลต่อไปนี้ 5, 3, 8, 4, 7, 3, 9 จงหามัธยฐาน

วิธีทำ 3 3 4 5 7 8 9

ตำแหน่งมัธยฐาน คือ $\frac{N+1}{2} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

ดังนั้น มัธยฐานชุดนี้ คือ 5

ตัวอย่างที่ 17 จงหามัธยฐานของค่าใช้จ่ายของนักเรียน 6 คนดังนี้ 122, 120, 125, 240, 210 และ 200 บาท

วิธีทำ 120 122 125 200 210 240

ตำแหน่งมัธยฐาน คือ $\frac{N+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$

นั่นคือ ตำแหน่งมัธยฐานอยู่กึ่งกลางระหว่างตำแหน่งที่ 3 และที่ 4

ดังนั้น มัธยฐานของค่าใช้จ่ายของนักเรียนกลุ่มนี้ คือ $\frac{125+200}{2} = 162.5$ บาท

มัธยฐาน

❷ การหามัธยฐานของข้อมูลที่แจกแจงความถี่

การคำนวณหาค่ามัธยฐานสามารถคำนวณได้โดยสูตร

$$\text{มัธยฐาน} = L_0 + I\left[\frac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_m}\right]$$

เมื่อ

L_0 แทน ขอบล่างหรือขีดจำกัดล่างแท้จริงที่มีค่ามัธยฐานอยู่ (เรียกชั้นนี้ว่า “ชั้นมัธยฐาน”)

I แทน ความกว้างของอันตรภาคชั้น

f_m แทน ความถี่ของข้อมูลในชั้นมัธยฐาน

$\sum f_L$ แทน ความถี่สะสมของชั้นที่ต่ำกว่าชั้นมัธยฐาน

N แทน จำนวนข้อมูลทั้งหมดหรือความถี่ทั้งหมด

มัธยฐาน

ขั้นตอนการหาค่ามัธยฐาน มีดังนี้

❶ หาความถี่สะสมของข้อมูลจากน้อยไปมาก

❷ หาตำแหน่งที่มีมัธยฐานอยู่ คือ $\frac{N}{2}$

❸ หาชั้นที่มีมัธยฐานพิจารณาจากตำแหน่งมัธยฐานในข้อ ❷ เทียบกับค่าความถี่สะสม โดยค่าตำแหน่งนั้นจะต้องไม่เกินค่าความถี่สะสมในชั้นใดชั้นหนึ่ง แสดงว่าชั้นนั้น คือ ชั้นมัธยฐาน

❹ หาค่า L_0, I, f_m และ $\sum f_L$ แล้วแทนค่าลงในสูตรมัธยฐานข้างต้น

มัธยฐาน

ตัวอย่างที่ 18 จงหามัธยฐานของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานอาชีพของนักเรียน 50 คน

วิธีทำ 1. หาความถี่สะสม

คะแนนสอบ	จำนวนนักเรียน	ความถี่สะสม
48 - 52	2	2
53 - 57	2	4
58 - 62	2	6
63 - 67	4	10
68 - 72	5	15
73 - 77	7	22
78 - 82	4	26* ชั้นมัธยฐาน
83 - 87	7	33
88 - 92	9	42
93 - 97	8	50

มัธยฐาน

2. หา $\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$ มัธยฐานจะอยู่ในตำแหน่งที่ 25 นี้

จากนั้นพิจารณาความถี่สะสม ดูว่าตำแหน่งที่ 25 อยู่ในชั้นใด
พบว่ามัธยฐานจะตกอยู่ในชั้นที่ 7 เนื่องจากความถี่สะสมของชั้นนี้ คือ 26

3. หาค่า $L_0 = 77.5$, $I = 82.5 - 77.5 = 5$, $f_m = 4$ และ $\sum f_L = 22$

4. จากสูตร มัธยฐาน

$$= L_0 + I\left[\frac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_m}\right]$$

$$= 77.5 + 5\left[\frac{\frac{50}{2} - 22}{4}\right]$$

$$= 77.5 + 3.75$$

$$= 81.25$$

ดังนั้น มัธยฐานของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานอาชีพ คือ 81.25 คะแนน

มัธยฐาน

การหามัธยฐานจากกราฟแสดงความถี่สะสม ทำได้ดังนี้

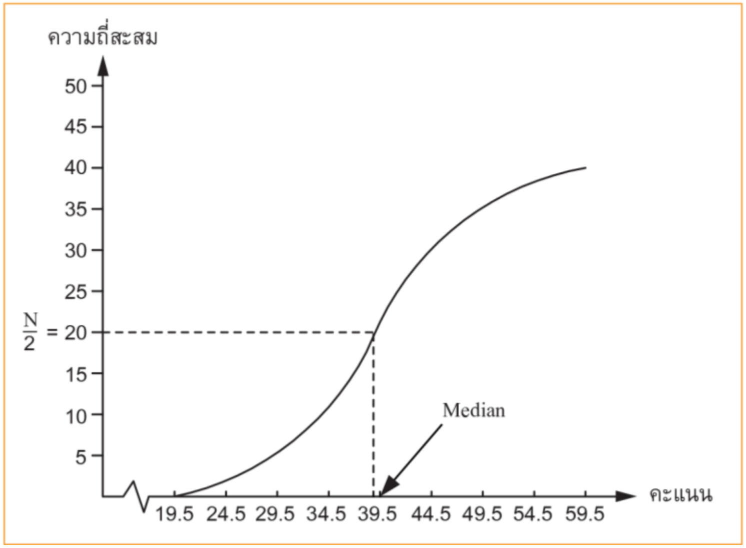
❶ เขียนกราฟเส้นโค้งความถี่สะสม (Ogive curve)

❷ ลากเส้นตรงจากแกนตั้ง ณ ตำแหน่งของมัธยฐาน ให้ขนานกับแกนนอน ไปยังเส้นโค้งความถี่สะสม

❸ ให้ลากเส้นตรง ณ จุดบนเส้นโค้งความถี่สะสมนี้ไปตั้งฉากกับแกนนอน

❹ ค่าของแกนนอน ณ จุดนั้นเป็นค่ามัธยฐานโดยประมาณ

ตัวอย่างที่ 19 จากตารางแจกแจงความถี่ในตัวอย่างที่ 18 สร้างเส้นโค้งตามความถี่สะสมได้ดังนี้



หมายเหตุ : ใช้กับข้อมูลที่แจกแจงความถี่

มัธยฐาน

ความสัมพันธ์ของค่ากลางของข้อมูล

ข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่มีลักษณะใกล้เคียงกับเส้นโค้งปกติ เราจะประมาณค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม จะมีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\bar{X} - \text{Mode} = 3(\bar{X} - \text{Median})$$

ข้อสังเกตและหลักเกณฑ์ที่สำคัญในการใช้ค่ากลางของข้อมูล

❶ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นค่ากลางที่ได้จากการนำข้อมูลทุกตัวมาใช้ในการคำนวณ แต่มัธยฐานและฐานนิยมเป็นค่ากลางที่ได้จากข้อมูลบางค่าเท่านั้น

❷ ในข้อมูลชุดใดถ้ามีข้อมูลบางตัวที่มีค่าสูงหรือต่ำกว่าข้อมูลอื่น ๆ มาก จะมีผลกระทบต่อค่าเฉลี่ยเลขคณิต แต่จะไม่มีผลกระทบต่อค่ามัธยฐานและฐานนิยม

❸ ถ้าตารางการแจกแจงความถี่ของข้อมูลประกอบด้วยอันตรภาคชั้นเปิด จะไม่สามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตได้ แต่สามารถหามัธยฐานและฐานนิยมได้

❹ มัธยฐานและฐานนิยมสามารถหาได้จากกราฟเส้นโค้งความถี่สะสมและฮิสโทแกรมตามลำดับ

❺ กรณีที่เป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ (Qualitative data) จะสามารถหาได้เฉพาะฐานนิยมเท่านั้น แต่ไม่สามารถหาค่ากลางชนิดอื่น ๆ

มัธยฐาน

การเลือกใช้ค่ากลางของข้อมูลให้เหมาะสม

❶ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ควรใช้กับข้อมูลเชิงปริมาณและแต่ละค่าไม่กระจัดกระจายมากนักเหมาะสำหรับที่จะใช้เป็นค่ากลางในการวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

❷ ฐานนิยม ใช้กับข้อมูลเชิงคุณภาพเพื่อสรุปผลว่าส่วนใหญ่หรือส่วนมากของข้อมูลชุดนี้มีลักษณะอย่างไร ฐานนิยมสามารถหาได้จากฮิสโทแกรม

❸ มัธยฐาน เหมาะสำหรับที่จะใช้กับข้อมูลที่มีบางค่าสูงหรือต่ำกว่าค่าอื่นๆ มาก จะใช้ในกรณีความกว้างอันตรภาคชั้นไม่เท่ากันทุกชั้น และจะใช้ได้กับข้อมูลตารางการแจกแจงความถี่ที่เป็นอันตรภาคชั้นเปิด คือชั้นแรกและ/หรือชั้นสุดท้ายเป็นชั้นปลายเปิด มัธยฐานสามารถหาได้จากกราฟเส้นโค้งความถี่สะสม

สรุป

การวัดค่าแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางที่นิยมใช้อยู่มี 3 วิธีคือ

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

❶ ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่ $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$

การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตแบบถ่วงน้ำหนัก $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i}$

การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม $\bar{x}_{\text{รวม}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$

❷ ข้อมูลที่แจกแจงความถี่

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{N}$$

$$\bar{x} = a + I\bar{x}'$$

สรุป

ฐานนิยม

❶ ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่

ค่าของข้อมูลที่มีความถี่สูงสุดของข้อมูลชุดนั้น

❷ ข้อมูลที่แจกแจงความถี่

k

$$\text{ฐานนิยม} = L_0 + I\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

k

มัธยฐาน

❶ ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่

ค่าที่มีตำแหน่งอยู่ตรงกลางของข้อมูลที่เรียงลำดับแล้ว

❷ ข้อมูลที่แจกแจงความถี่

$$\text{มัธยฐาน} = L_0 + I\left[\frac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_m}\right]$$