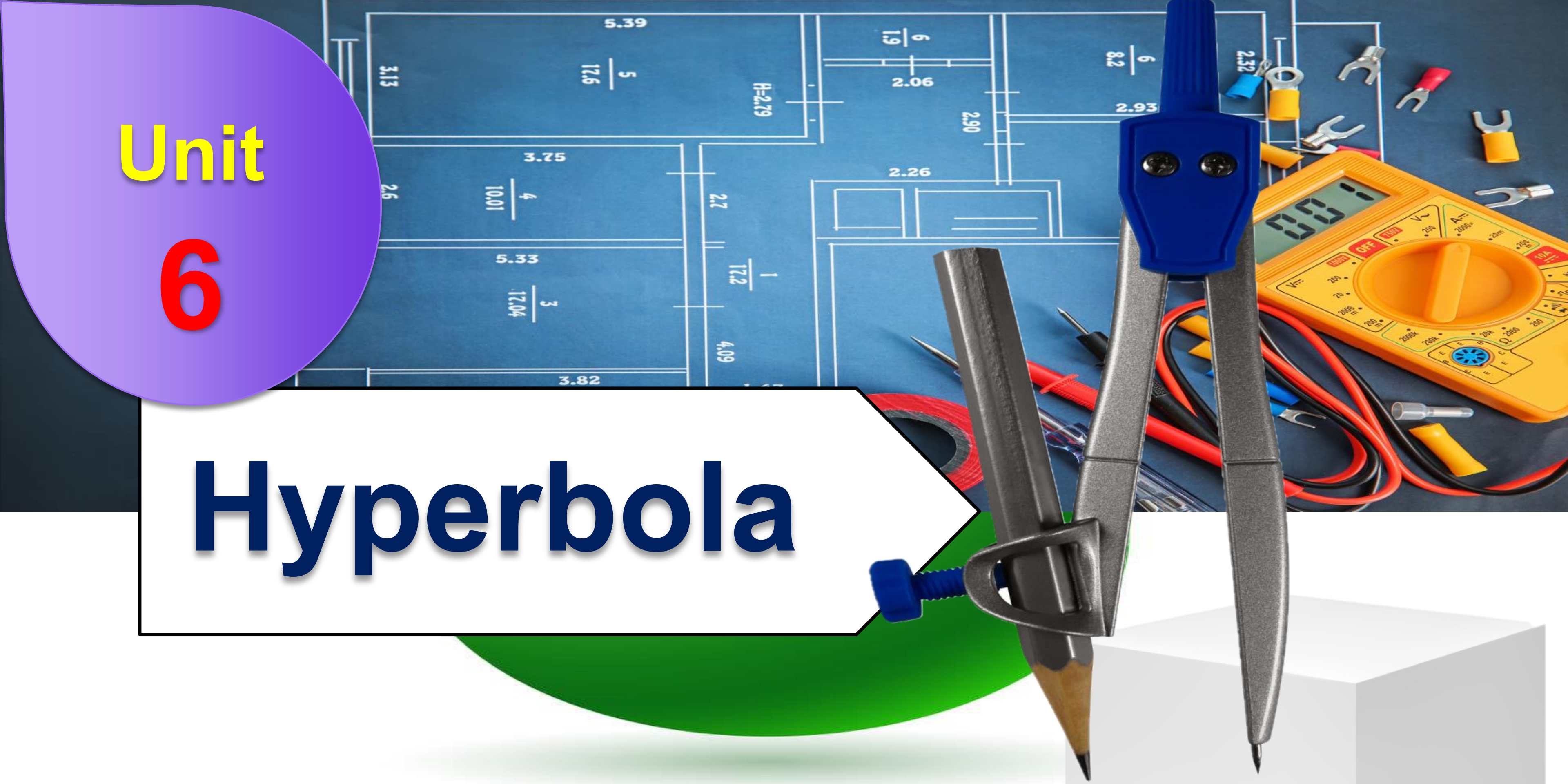
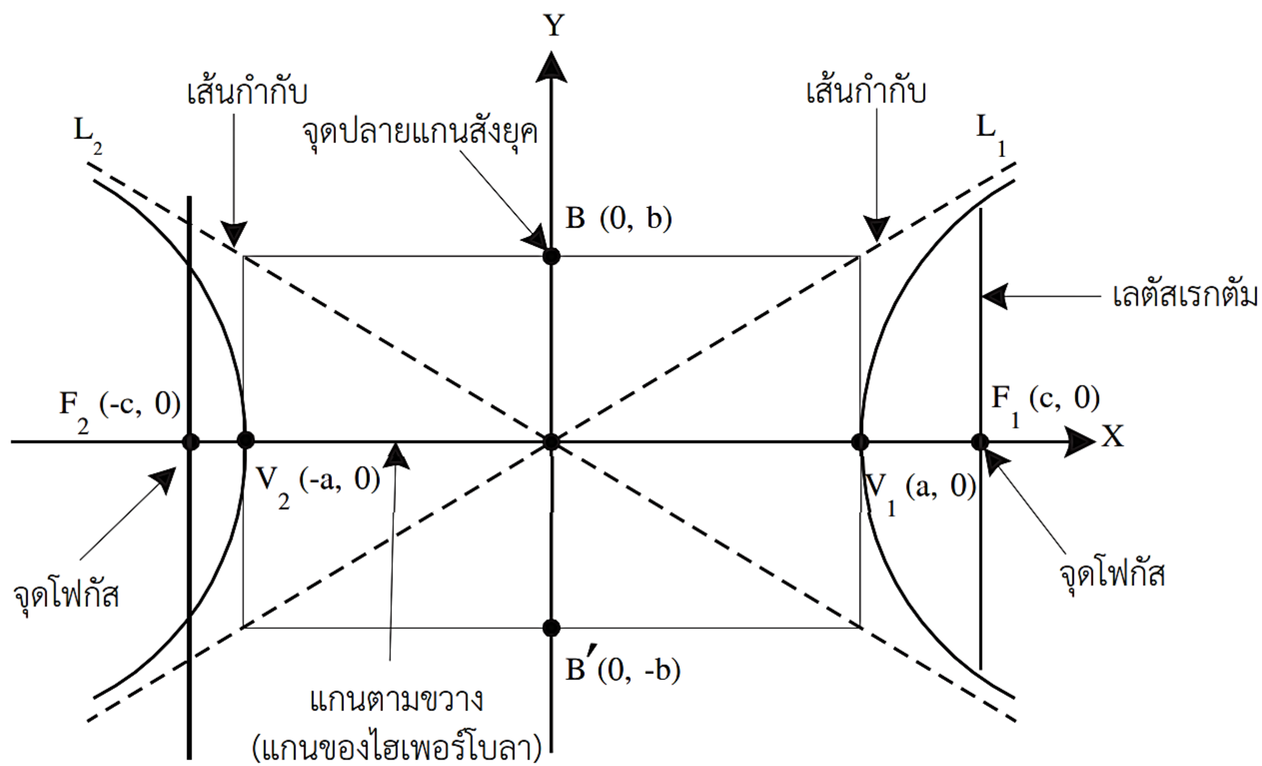
Unit
6

Hyperbola



Components of a hyperbola

6

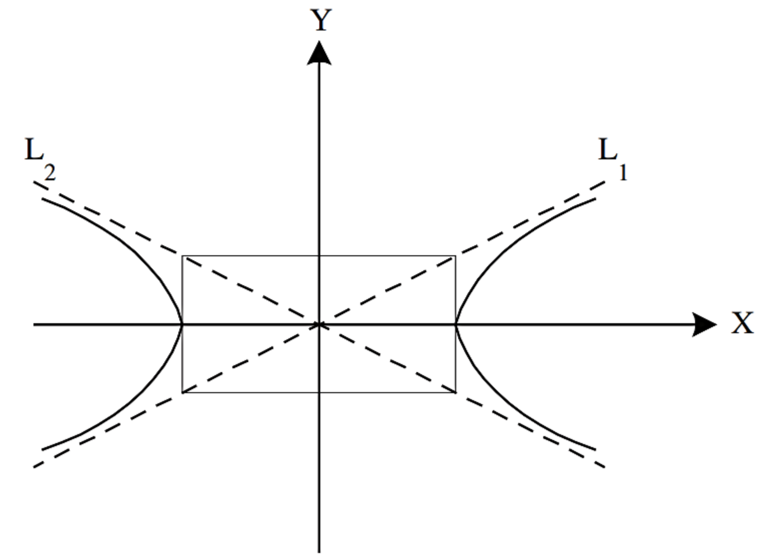


รูปที่ 9.1 แสดงส่วนประกอบของไฮเพอร์โบลา

A hyperbola centered at the origin.

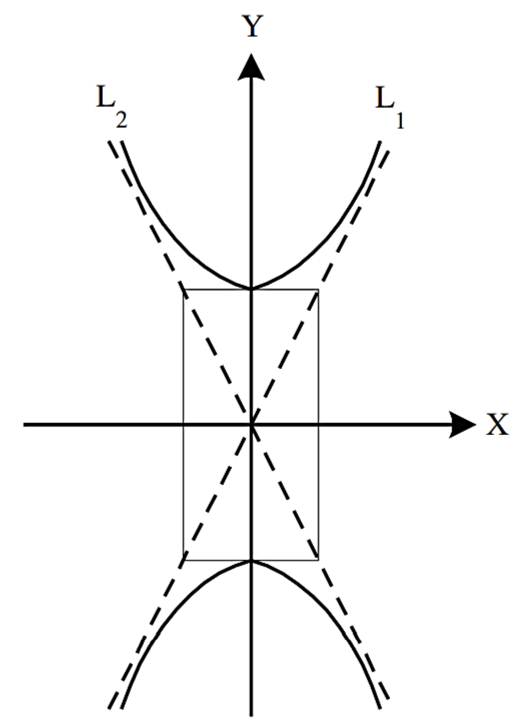
6

When the axis of the hyperbola is the X axis.



รูปที่ 9.2

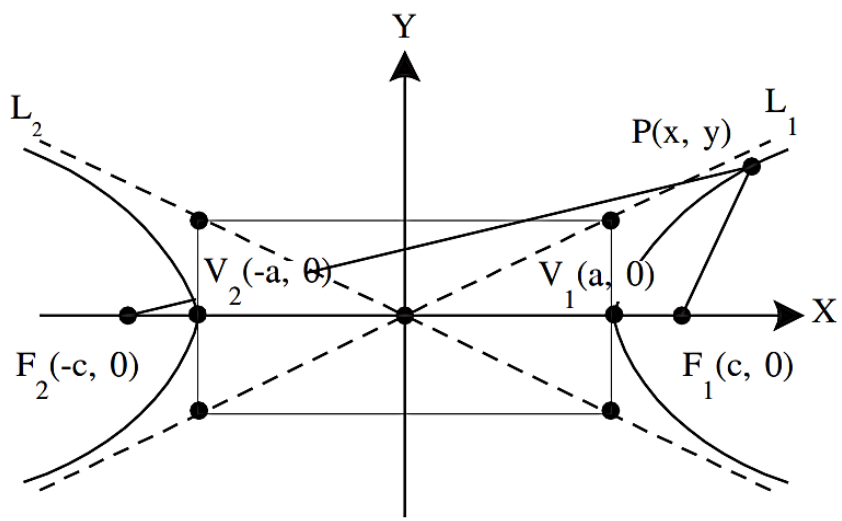
When the axis of the hyperbola is the Y axis.



รูปที่ 9.3

A hyperbola with an axis on the X axis has standard form equations.

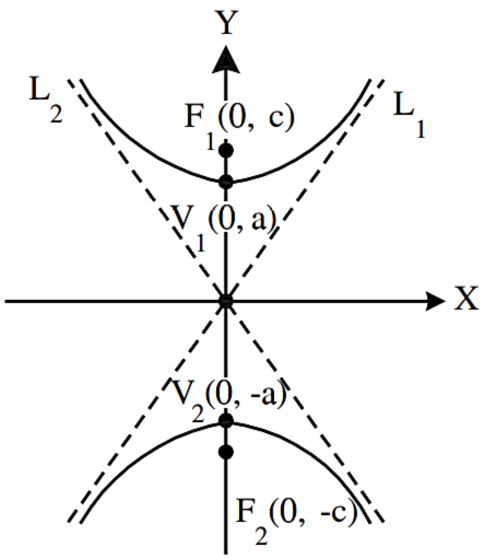
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ ซึ่งมีที่มาดังนี้



รูปที่ 9.4

A hyperbola with an axis on the Y axis has standard form equations.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



รูปที่ 9.5

เส้นกำกับทั้งสอง ได้แก่

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{และ} \quad y = -\frac{a}{b}x$$

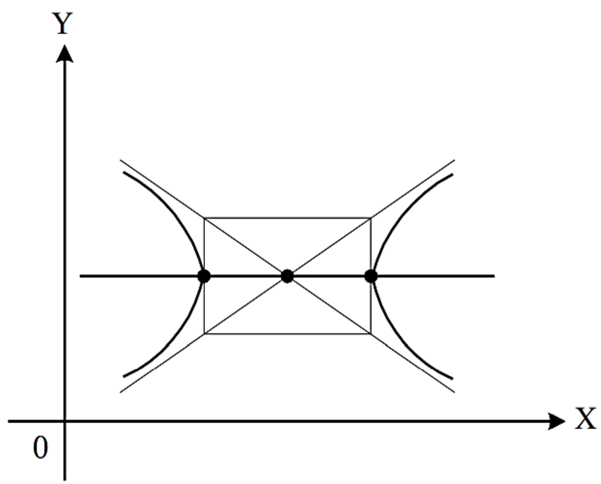
ซึ่งสมการนี้ มีที่มาทำนองเดียวกับสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา ที่แกนอยู่บนแกน X และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

Hyperbola centered at point (h, k)

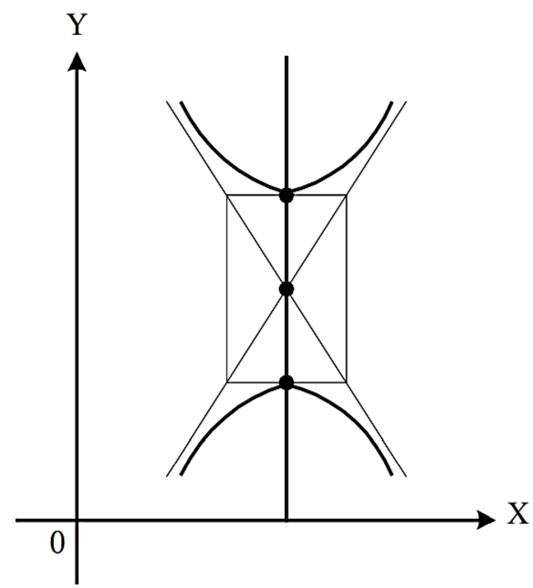
6

There are two types of hyperbolas centered at the point (h, k):

1. A hyperbola whose axis is parallel to the X axis.
2. A hyperbola whose axis is parallel to the Y axis.



รูปที่ 9.6 (แกนขนานกับแกน X)

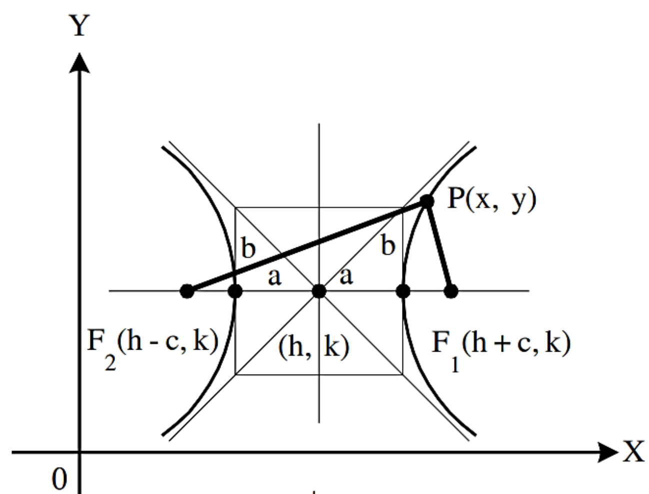


รูปที่ 9.7 (แกนขนานกับแกน Y)

A hyperbola with an axis parallel to the X axis has standard form equations.

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \quad \text{เมื่อ} \quad a^2 + b^2 = c^2$$

Suppose a hyperbola centered at point (h, k) has focal points at points F_1 (h+c, k) and F_2 (h-c, k) and has a constant value of 2a as shown in Figure 9.8.



รูปที่ 9.8

$$|PF_2| - |PF_1| = 2a$$

$$\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} - \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง

$$(x-(h-c))^2+(y-k)^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} + (x-(h+c))^2+(y-k)^2$$

นำ $(y-k)^2$ ลบทั้ง 2 ข้าง

$$x^2-2(h-c)x+(h-c)^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} + x^2-2(h+c)x+(h+c)^2$$

$$x^2-2hx+2cx+h^2-2ch+c^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} + x^2-2hx-2cx+h^2+2ch+c^2$$

นำ $x^2-2hx+h^2+c^2$ ลบทั้ง 2 ข้าง

$$2cx-2ch = 4a^2+4a\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} - 2cx+2ch$$

$$4cx-4ch = 4a^2+4a\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}$$

นำ 4 หารตลอด

$$(x - h)c = a^2 + a\sqrt{(x - (h - c))^2 + (y - k)^2}$$

$$(x - h)c - a^2 = a\sqrt{(x - (h - c))^2 + (y - k)^2}$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง

$$(x - h)^2c^2 - 2(x - h)ca^2 + a^2 = a^2((x - (h + c))^2 + (y - k)^2)$$

$$(x - h)^2c^2 - 2(x - h)ca^2 + a^4 = a^2((x - h) - c)^2 + (y - k)^2)$$

$$(x - h)^2c^2 - 2(x - h)ca^2 + a^4 = a^2(x - h)^2 - 2a^2(x - h)c + a^2c^2 + a^2(y - k)^2$$

$$(x - h)^2c^2 - a^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(x - h)^2(c^2 - a^2) - a^2(y - k)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

นำ $a^2(c^2 - a^2)$ หารทั้ง 2 ข้าง

ดังนั้น สมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่แกนขนานกับแกน X คือ

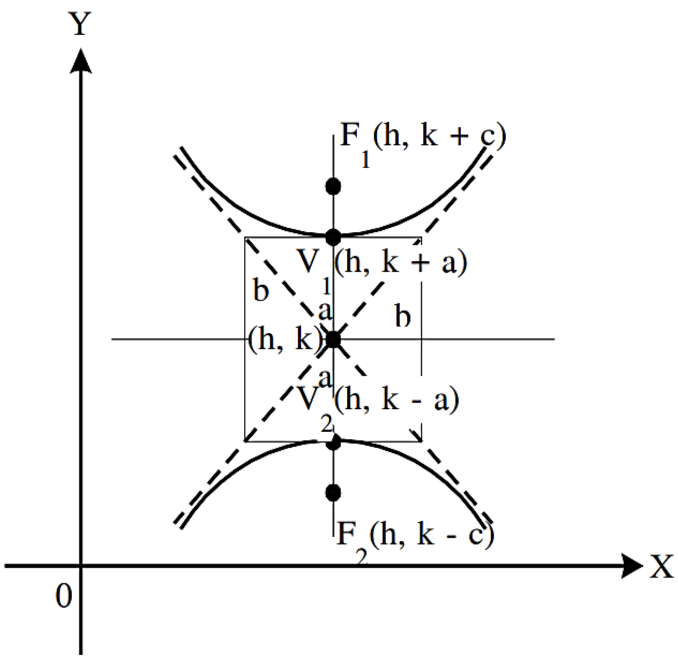
$$\boxed{\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1}$$

สมการของเส้นกำกับหาได้จาก $y - y_1 = m(x - x_1)$

นั่นคือ สมการเส้นกำกับ L_1 คือ $y - k = \frac{b}{a}(x - h)$

และ สมการเส้นกำกับ L_2 คือ $y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$

A hyperbola with an axis parallel to the Y axis has standard form equations.



$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

เมื่อ $b^2 = c^2 - a^2$

สมการเส้นกำกับ L_1 คือ

$$y - k = \frac{a}{b}(x - h)$$

สมการเส้นกำกับ L_2 คือ

$$y - k = -\frac{a}{b}(x - h)$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ให้เห็นจริงได้ ทำนองเดียวกับไฮเพอร์โบลาที่มีแกนขนานกับแกน X