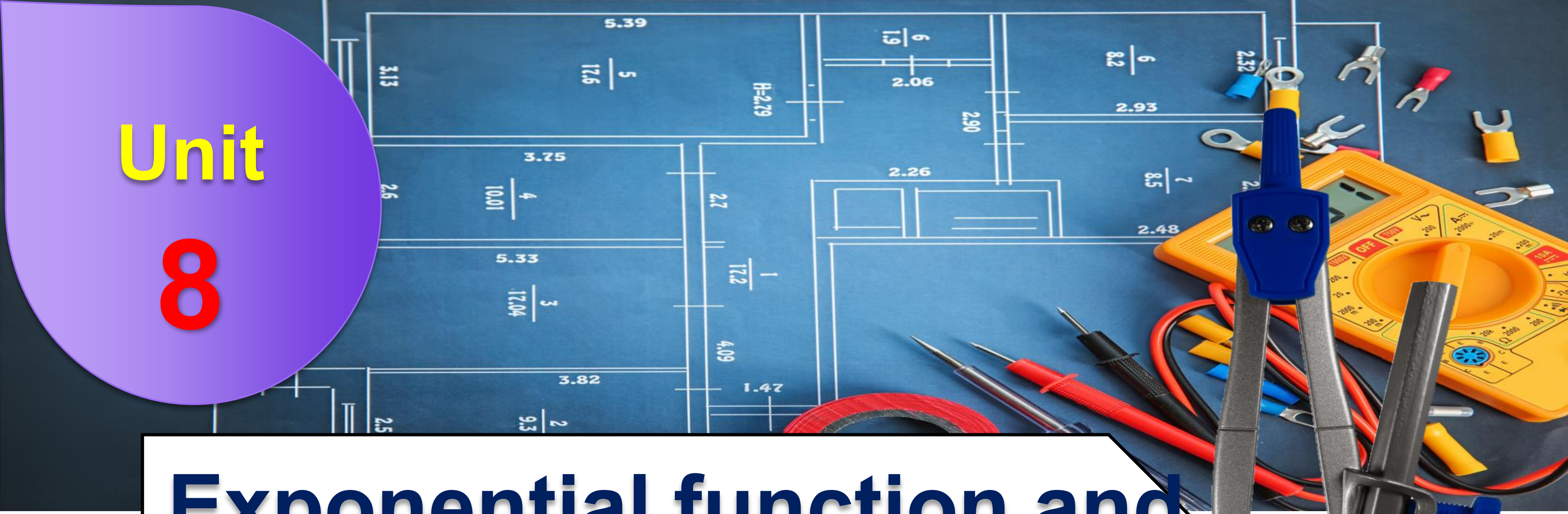
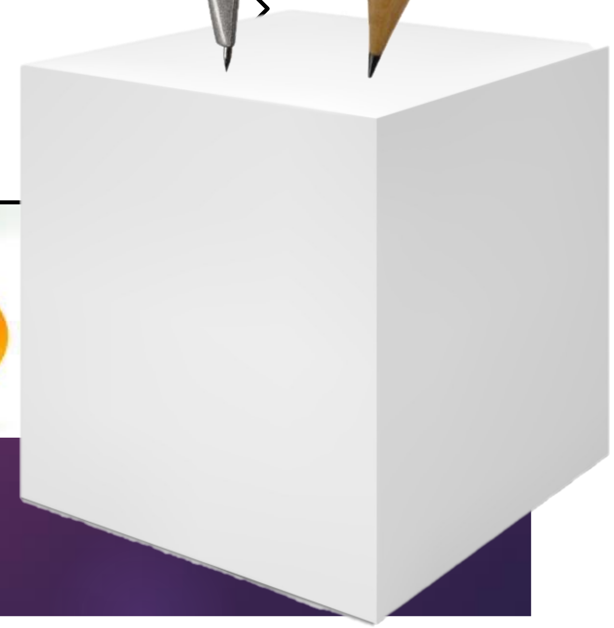
Unit 8



Exponential function and logarithmic function



Exponential function

8

The meaning of a^n means multiplication of a n times when a is a real number and n is a positive integer.For example $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ or $(1/2)^4 = (1/2)\,(1/2)\,(1/2)\,(1/2) = (1/16)$

Properties of exponents

1. $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$

2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ เมื่อ $m > n$

   $= 1$ เมื่อ $m = n$

   $= \dfrac{1}{a^{n-m}}$ เมื่อ $m < n$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$

4. $(ab)^m = a^m b^m$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^m}{b^m}$

example

Keep it in a simple form. and has a positive exponent.

(1) $(3x^{2}y^{-4})(2x^{-3}y)$

(2) $\dfrac{15a^{3}b^{2}}{5a^{-1}b^{4}}$

(3) $\left(\dfrac{12x^{-1}y^{2}}{2xy^{-3}}\right)$

วิธีทำ

(1) $(3x^{2}y^{-4})(2x^{-3}y)$

$$= (3)(2)\,x^{2+(-3)}\,y^{-4+1}$$

$$= 6x^{-1}y^{-3}$$

$$= \frac{6}{xy^{3}}$$

$$(2)\quad \frac{15a^{3}b^{2}}{5a^{-1}b^{4}} = 3\,a^{3-(-1)}\,b^{2-4}$$

$$= 3\,a^{4}\,b^{-2}$$

$$= \frac{3a^{4}}{b^{2}}$$

$$(3)\quad \left(\frac{12x^{-1}\,y^{2}}{2xy^{-3}}\right)^{-1} = \left(6\,x^{-1\,-1}\,y^{2-(-3)}\right)^{-1}$$

$$= \left(6\,x^{-2}\,y^{5}\right)^{-1}$$

$$= 6^{-1}\,x^{2}\,y^{-5}$$

$$= \frac{x^{2}}{6y^{5}}$$

Exponential function

Definition

Let a be any real number, where $a > 0$ and $a \neq 1$ and x is a real number, then the exponential function is a function of the form

f(x) = a^x.

Properties of Exponential Functions

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก $a \neq 1$, $b \neq 1$, x และ y เป็นจำนวนจริง

1. $a^x \bullet a^y \quad = \quad a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} \quad = \quad a^{x-y}$
3. $(a^x)^y \quad = \quad a^{xy}$
4. $(a\,b)^x \quad = \quad a^x\,b^x$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x \quad = \quad \dfrac{a^x}{b^x}$
6. $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
7. ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $a^x = b^x$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$

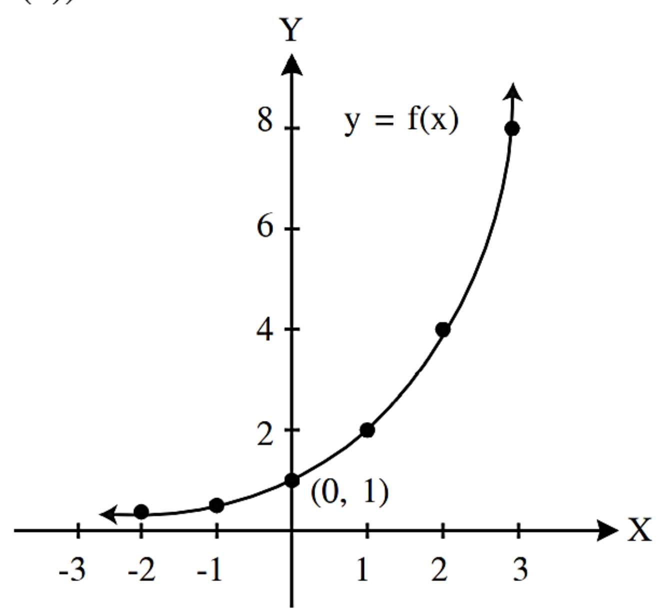
Graph of an exponential function

example

Plot the graph of the exponential function f(x) = 2x.

กำหนดค่า x และหาค่า f(x) แล้วจึงนำคู่อันดับ (x, f(x)) ทั้งหมดไปเขียนกราฟ ได้ดังนี้

x	2^x
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



From the graph, the following observations can be made:

1. The x values are all real numbers, and the y values are all positive real numbers.
2. The graph intersects the y axis at the point (0, 1).
3. The graph increases from left to right, that is, when x increases, the value f(x) increases. We call it an increasing function.
4. In the second quadrant, when x becomes more negative, The graph or function values will get closer to the x-axis, indicating that the value of the function approaches 0 as x approaches $-\infty$.

example

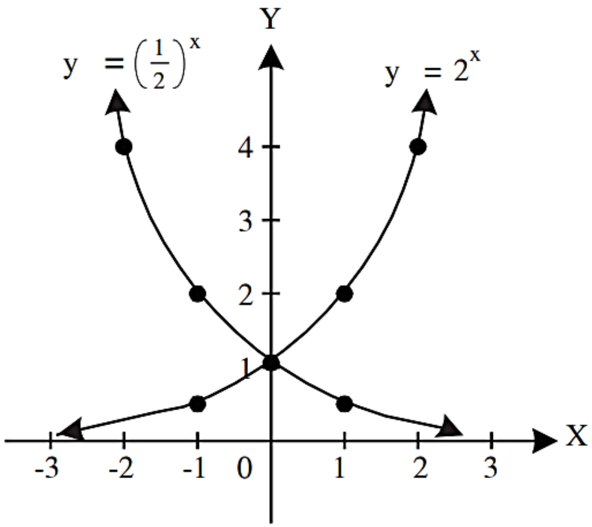
8

Plot the graphs y = 2^{x} and y = $(1/2)^x$ on the same X, Y axis plane.

example

Determine the x value and find the y value for each function. Then take the ordered pair (x, y) of each function. Go ahead and draw a graph like this:

x	2^x
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4



x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	0.5
2	0.25

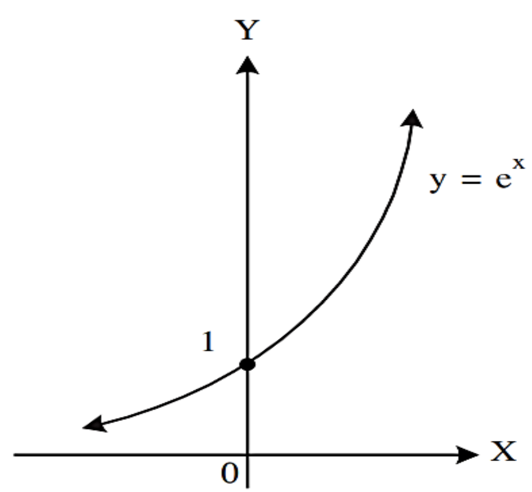
จากในตัวอย่างจะได้ว่า กราฟของ y = 2^x สมมาตรกับกราฟของ และ y = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Exponential function base e

Definition

Let x be any real number. The exponential function of base e is represented by $f(x) = e^x$ where e is approximately 2.71828.

The value e is a constant that makes many mathematical principles true. and related Therefore it is very important. in mathematicsSince e > 1, the graph of the exponential function with basis e looks the same as the graph of the exponent function. The exponential form y = a^x when a > 1 looks like this:



รูปที่ 11.4

Logarithmic function

Definition

If x and a are positive real numbers, where $a \neq 1$, then $y = \log_a x$ is called the logarithm x on the base a, that is, $y = \log_a x \leftrightarrow a^y = x$

example

8

จากสมการต่อไปนี้ จงหาค่า x

(1) $\log_3 x = 2$

(2) $\log_{25} x = \frac{1}{2}$

(3) $\log_x 81 = 4$

วิธีทำ

(1) จาก $\log_3 x = 2$

$x = 3^2 = 9$

นั่นคือ $x = 9$

(2) จาก $\log_{25} x = \frac{1}{2}$

$x = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

นั่นคือ $x = 5$

(3) จาก $\log_x 81 = 4$

$81 = x^4$

$3^4 = x^4$

นั่นคือ $x = 3$

นำ 4 หารตลอด

$$(x - h)c = a^2 + a\sqrt{(x - (h - c))^2 + (y - k)^2}$$

$$(x - h)c - a^2 = a\sqrt{(x - (h - c))^2 + (y - k)^2}$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง

$$(x - h)^2c^2 - 2(x - h)ca^2 + a^2 = a^2((x - (h + c))^2 + (y - k)^2)$$

$$(x - h)^2c^2 - 2(x - h)ca^2 + a^4 = a^2((x - h) - c)^2 + (y - k)^2)$$

$$(x - h)^2c^2 - 2(x - h)ca^2 + a^4 = a^2(x - h)^2 - 2a^2(x - h)c + a^2c^2 + a^2(y - k)^2$$

$$(x - h)^2c^2 - a^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(x - h)^2(c^2 - a^2) - a^2(y - k)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

นำ $a^2(c^2 - a^2)$ หารทั้ง 2 ข้าง

Properties of Logarithms

สำหรับจำนวนจริงบวก M, N และ a โดยที่ $a \neq 1$ และ p เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N$
4. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
5. $\log_a M^p = p \log_a M$
6. $a^{\log_a x} = x$
7. $\log_a M = \log_a N$ ก็ต่อเมื่อ $M = N$

Ordinary logarithm

Common logarithm (Common Logarithm) is a decimal logarithm. which is the logarithm used in It is widely practiced to write ordinary logarithms. We prefer not to write the base, such as log_10 20, we will write only log 20.

Real numbers greater than 0 can be written in the form A x 10^n where 0 < A < 10 and n is any integer.

8

Changing the logarithmic base

ให้ $y = \log_a M$ โดยที่ M และ a เป็นจำนวนจริงบวก และ $a \neq 0$ สามารถเปลี่ยนให้เป็นลอการิทึมบนฐาน b เมื่อ b เป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่เท่ากับศูนย์ ได้ดังนี้

$$\log_a M = y$$

$$M = a^y \qquad \text{(เปลี่ยนในรูปเลขยกกำลัง)}$$

$$\log_b M = \log_b a^y \qquad \text{(จากสมบัติของลอการิทึม)}$$

$$\log_b M = y \log_b a$$

$$y = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

ดังนั้น

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

example

8

จงหาค่าโดยประมาณของลอการิทึมต่อไปนี้ โดยใช้เครื่องคำนวณ

(1) $\dfrac{\log 3}{\log 5}$ (2) $\log \dfrac{3}{5}$ (3) $\log 3 - \log 5$

วิธีทำ

จากเครื่องคำนวณ $\log 3 = 0.47712$ และ $\log 5 = 0.69897$

(1) $\dfrac{\log 3}{\log 5} = \dfrac{0.47712}{0.69897}$

$= 0.6826$

(2) $\log \dfrac{3}{5} = \log 0.6$

$= -0.2218$ (ค่าลอการิทึมจากเครื่องคำนวณ)

(3) $\log 3 - \log 5 = 0.47712 - 0.69897$

$= -0.2218$

Natural Logarithm

Definition

natural logarithm is a logarithm with base e written in the form

$$f(x) = \ln x$$

โดยที่ $\ln x = \log_e x$ เมื่อ $e = 2.71828$

เราอ่าน ln x ว่า ลอการิทึมฐาน e ของ x หรือลอการิทึมธรรมชาติของ x สำหรับลอการิทึมฐาน e กับลอการิทึมฐาน 10 มีความสัมพันธ์กัน ดังนี้

พิจารณา

$$\ln N = \log_e N$$

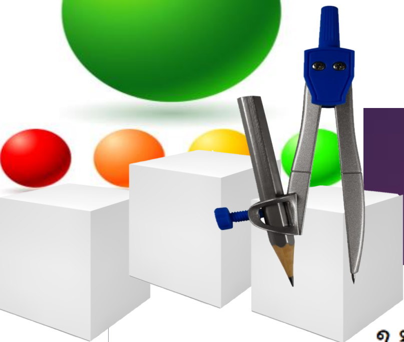
$$= \frac{\log N}{\log e} \quad \text{(เปลี่ยนฐาน e เป็นฐานสิบ)}$$

$$= \frac{\log N}{\log 2.71828}$$

$$\ln N = \frac{\log N}{0.43429} = 2.3026 \log N$$

ดังนั้น $\ln N = 2.3026 \log N$

$\log N = 0.43429 \ln N$



example

8

จงใช้สมบัติของลอการิทึม เขียนลอการิทึมต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปลอการิทึมของจำนวนเดียว

(1) $\ln 3 - \ln a + 2\ln b$

(2) $2\ln y - \frac{1}{3}\ln x - \ln 5$

วิธีทำ

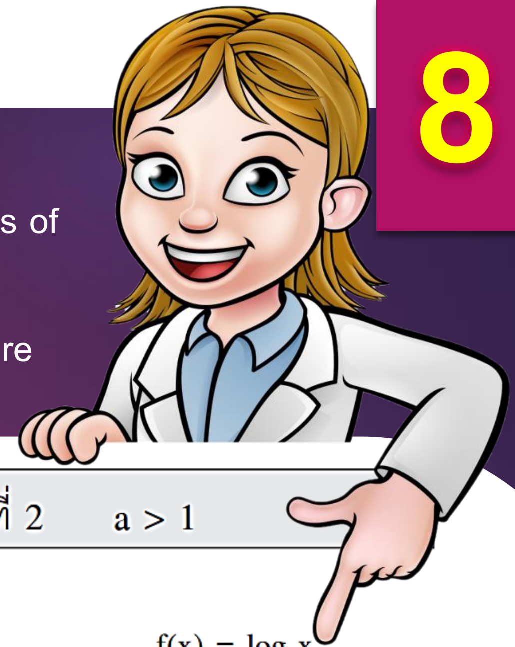
(1) $\ln 3 - \ln a + 2\ln b = \ln 3 - \ln a + \ln b^2$

$= \ln\left(\frac{3b^2}{a}\right)$

(2) $2\ln y - \frac{1}{3}\ln x - \ln 5 = \ln y^2 - \ln x^{\frac{1}{3}} - \ln 5$

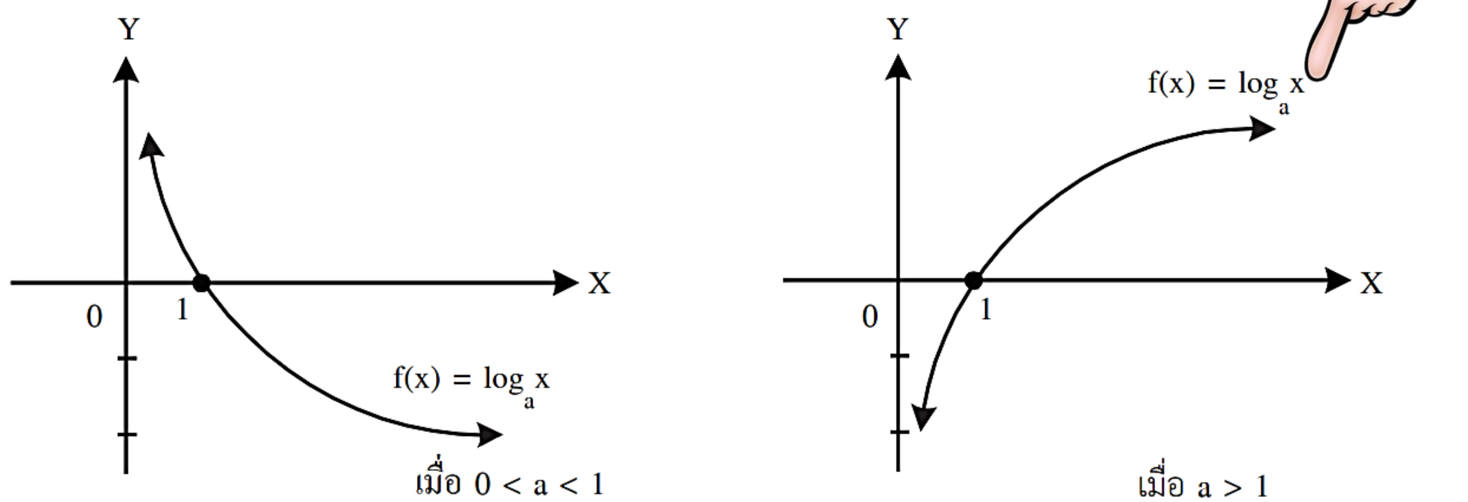
$= \ln\left(\frac{y^2}{5x^{\frac{1}{3}}}\right)$

Graph of a logarithmic function



Graph of a logarithmic functionThere are two types of graphs of logarithmic functions, and which type depends on the base number a, as shown in Figure 11.5.

กรณีที่ 1 $0 < a < 1$	กรณีที่ 2 $a > 1$

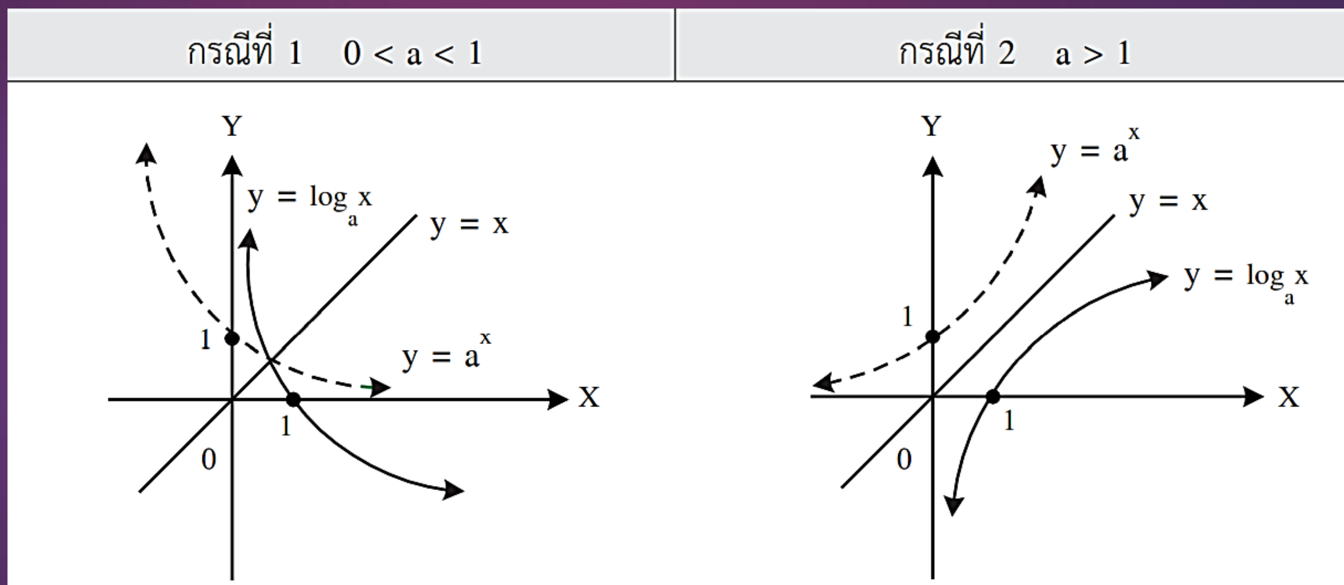


รูปที่ 11.5

From Figure 11.5, a graph of a logarithmic function. It looks like this:

1. From Figure 11.5, the graph of the logarithmic function.
2. It looks like this:The graph intersects the X-axis at the point (1, 0).
3. The graph never intersects the Y axis and is always to the right of the Y axis.
4. In the case $0 < a < 1$, the graph of $f(x) = \log_a x$ will be the graph of the reducing function.In the case of $a > 1$, the graph of $f(x) = \log_a x$ is the graph of the increasing function.

Because of the logarithmic function It is a function inverse of the exponential function. Therefore, we will get a graph of Logarithmic function Symmetrical to the graph of an exponential function.



รูปที่ 11.6