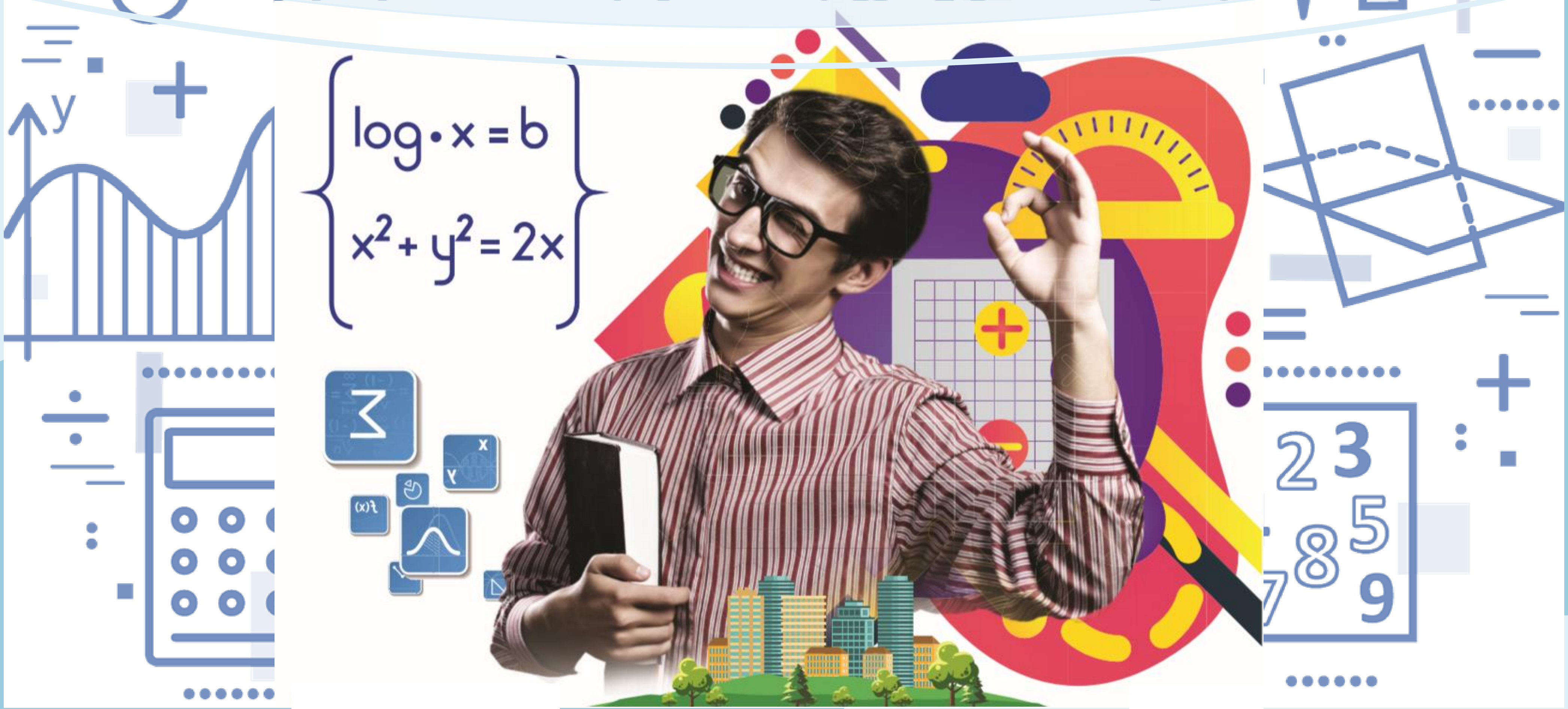
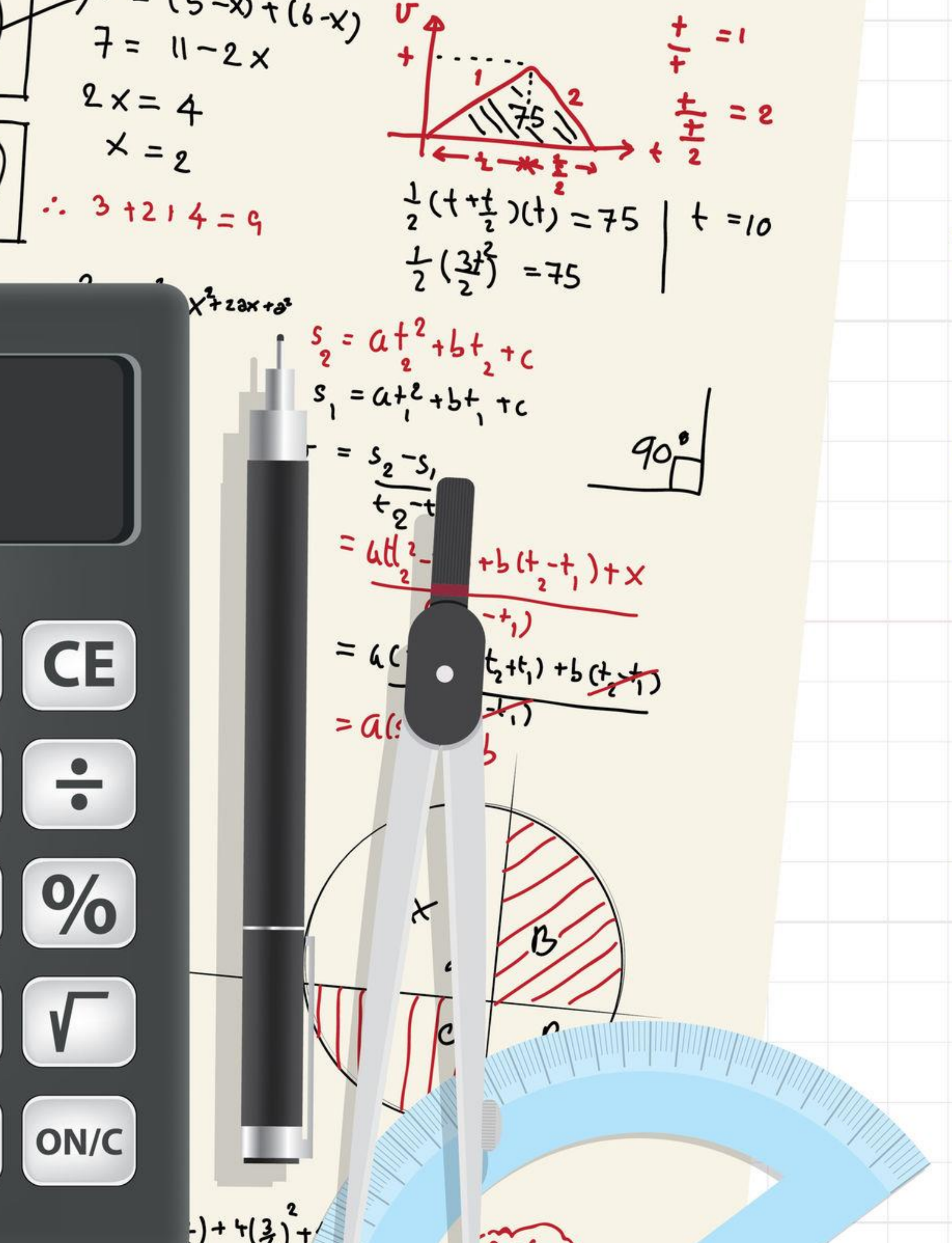
Calculus 1





Unit 1

Binomial Theorem

learning content

- Factorial
- Binomial coefficient
- Pascal Triangle
- Binomial Theorem

ทวินาม

Binomial

The sum or difference of two terms in the form of $\llbracket(a+b)\rrbracket^{\wedge}n$ or $\llbracket(a-b)\rrbracket^{\wedge}n$.When n is a positive integer, having a large value of n is difficult and time consuming. Using the Binomial Theorem will be more convenient.To study the binomial theorem, one must have knowledge of- Factorial- Binomial coefficients

Factorial

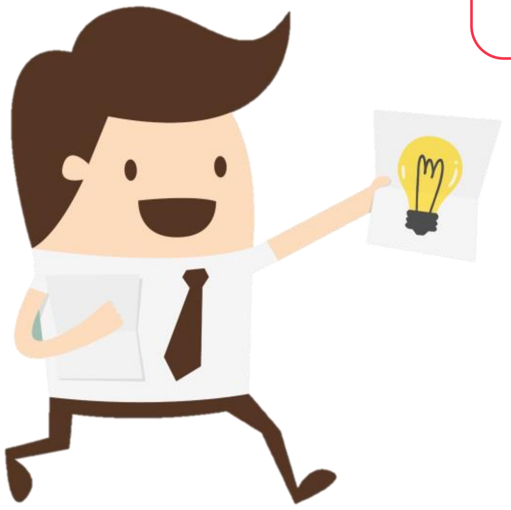
Factorial of n is denoted by n!Pronounced "n factorial"

Definition

แฟกทอเรียล n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคือ n!

และ $n! = n(n-1)(n-2)\ldots3\cdot2\cdot1$

หรือ $n! = 1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)\ n$



ถ้า n = 0 กำหนดให้ 0! = 1 ซึ่งแสดงให้เห็นจริง ดังนี้

จาก $n! = n(n-1)!$ จะได้ว่า $(n-1)! = \frac{n!}{n}$

แทน $n = 1$ จะได้ $(1-1)! = \frac{1!}{1}$

นั่นคือ $0! = 1$

example Find the value of the following.

1) $4!$ 2) $\frac{6!}{3!}$ 3) $\frac{11!}{8!3!}$

วิธีทำ

1) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

2) $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

เพื่อความรวดเร็วข้อ 2) อาจใช้วิธีการดังนี้

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

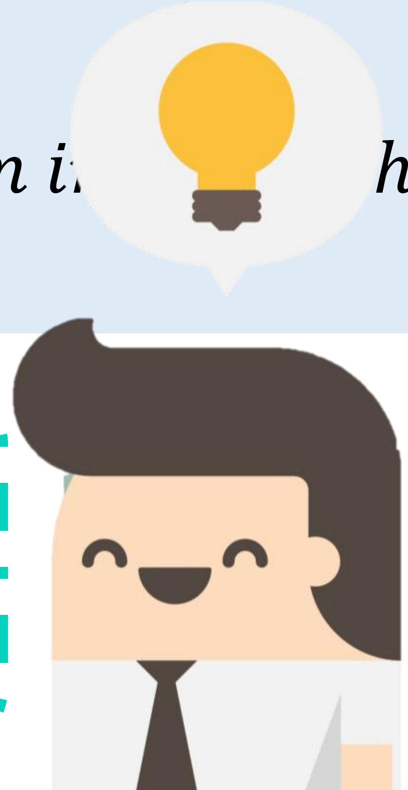
3) $\frac{11!}{8!3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!\,(3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2} = 165$

Binomial coefficient

The number multiplied by the binomial terms distributed into smaller terms, which is written as (■8(𝑛@𝑟)), is pronounced binomial coefficient N.R.

$$〚(a \pm b)〛$$

^n means the binomial raised to the power n, and the term i h
1, which will be calculated according to the definition.



Definition

If n,r are integers 0 ≤ r ≤ n.Then (■8(𝑛@𝑟))
= 𝑛!/(𝑛−𝑟)!𝑟!

example

Find the value of the following.

1) $\binom{9}{5}$ 2) $\binom{9}{4}$ 3) $\binom{5}{5}$ 4) $\binom{5}{0}$

วิธีทำ

จาก $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

1) $\binom{9}{5} = \frac{9!}{(9-5)!\,5!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5!}{4!\,5!}$

$= \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 126$

2) $\binom{9}{4} = \frac{9!}{(9-4)!\,4!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4!}{5!\,4!}$

$= \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 126$

3) $\binom{5}{5} = \frac{5!}{(5-5)!\,5!} = \frac{1!}{0!} = 1$

4) $\binom{5}{0} = \frac{5!}{(5-0)!\,0!} = \frac{5!}{5!\,0!} = 1$

จะพบว่า $\binom{9}{5} = \binom{9}{4}$ และ $\binom{5}{5} = \binom{5}{0}$

นั่นคือ $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

Pascal Triangle

The binomial distribution of $\llbracket (a+b) \rrbracket$^$n$ where a,b are any real numbers and n is a positive integer, when distributing multiplication gives

$$
\begin{array}{lcc}
(a+b)^0 & = & 1 \\
(a+b)^1 & = & a + b \\
(a+b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 & = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 & = & a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 & = & a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{array}
$$

The distribution of $[\![(a+b)]\!]$^n, if we write only the coefficients, will have the form of a triangle.

Row 1

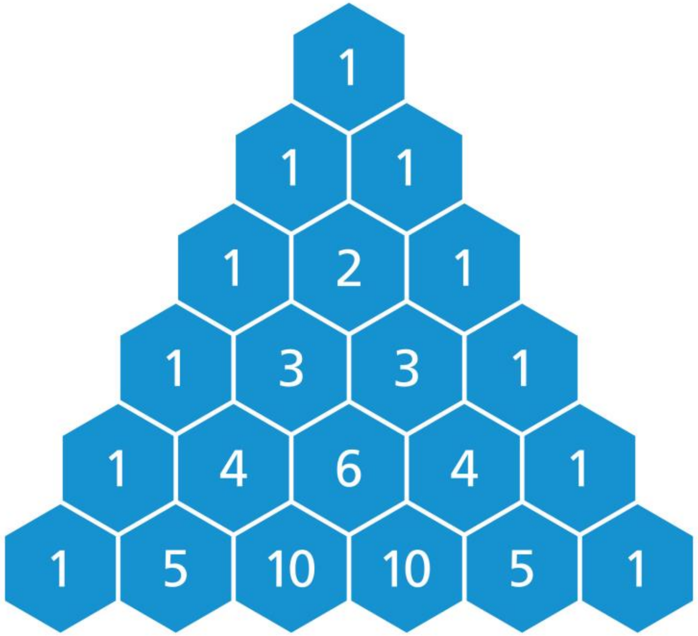
Row 2

Row 3

Row 4

Row 5

Row 6



Observations

The number in each row is the sum of the two numbers to the left and right of the next row.The edge row always has a value of 1.

Because the coefficient of $\llbracket(a+b)\rrbracket$^$n$ is triangular, it is called Pascal's triangle. Named after mathematician Blaise Pascal.The distribution $\llbracket(a+b)\rrbracket$^$n$ always has one more term than n, and each term consists of the coefficients a and b multiplied together. The coefficients have numbers in the row corresponding to n. A and b in each term will change. Go on and on like this:

ในพจน์แรก	a	จะยกกำลัง	n	และ	b ยกกำลัง	0
ในพจน์ที่สอง	a	จะยกกำลัง	n-1	และ	b ยกกำลัง	1
ในพจน์ที่สาม	a	จะยกกำลัง	n-2	และ	b ยกกำลัง	2
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
ในพจน์สุดท้าย	a	จะยกกำลัง	0	และ	b ยกกำลัง	n

The exponent of a starts with n and decreases by 1 until it reaches 0.The exponent of b starts at 0 and increases by 1 until n.

ตัวอย่าง จงกระจาย $(x-y)^5$

วิธีทำ

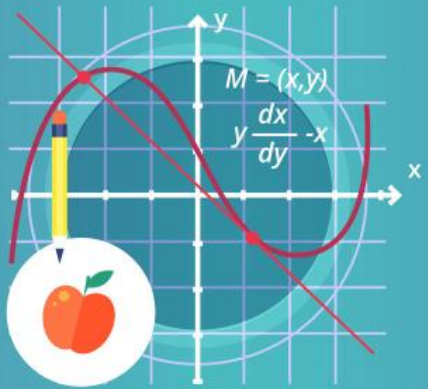
จะมีสัมประสิทธิ์ของ $(a+b)^5$ อยู่ในแถวที่ 6 คือ 1 5 10 10 5 1

จะได้ว่า $(x-y)^5 = [x+(-y)]^5$

$= (1)(x)^5(-y)^0+5(x^4)(-y)^1+10(x^3)(-y)^2+10(x^2)(-y)^3+5(x)(-y)^4+(1)(x^0)(-y)^5$

นั่นคือ $(x-y)^5 = x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$

ข้อสังเกต ในการกระจาย $(a+b)^n$ ในแต่ละพจน์ ผลบวกของเลขชี้กำลังของ a และ b จะเท่ากับ n เสมอ



Binomial Theorem

If r and n are integers, where $0 \leq r \leq n$, then

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

หรือ $$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Observations

1

พจน์ที่ r+1 กระจายได้เป็น

$$T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

2

สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ r+1 คือ

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

ตัวอย่าง

จงกระจาย $(a+b)^5$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

วิธีทำ

จากทฤษฎีบททวินามจะได้

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5+\binom{5}{1}a^4b+\binom{5}{2}a^3b^2\binom{5}{3}a^2b^3+\binom{5}{4}ab^4+\binom{5}{5}b^5$$

หาสัมประสิทธิ์ทวินาม

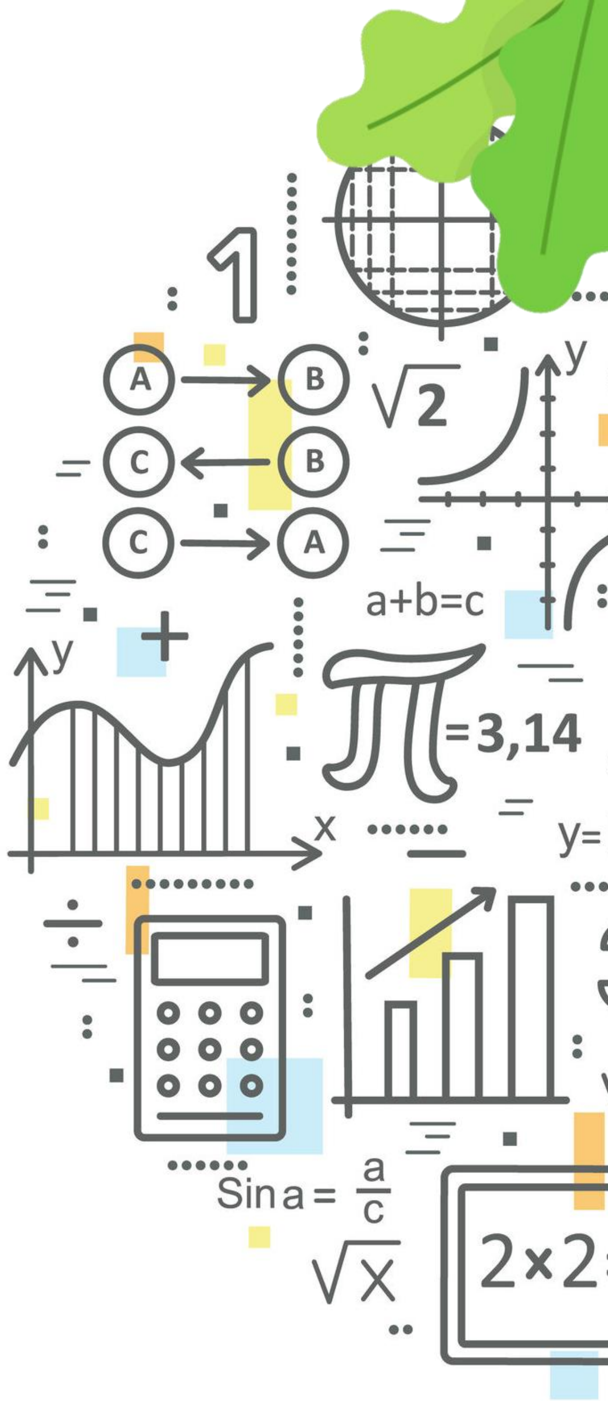
$$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = \frac{5!}{0!\,5!} = 1$$

$$\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{1!\,4!} = 5$$

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

จะได้ $(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

นั่นคือ $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$



ตัวอย่าง

จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ x^8y^2 ในการกระจาย $(2x+y)^{10}$

วิธีทำ

พจน์ที่ต้องการหาสัมประสิทธิ์ คือ x^8y^2 ซึ่งเป็นพจน์ที่ 3 นั่นคือ $T_3 = T_{2+1}$

จะได้ว่า $a = 2x$, $b = y$, $r = 2$ และ $n = 10$

$$
\begin{aligned}
T_3 = T_{2+1} &= \binom{10}{2}(2x)^8y^2 \\
&= \frac{10!}{(10-2)!\ 2!}\ (2^8x^8)y^2 \\
&= \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{8!\ 2!}\ (256x^8\ y^2) \\
&= 45(256)\ x^8\ y^2 \\
&= 11{,}520\ x^8\ y^2
\end{aligned}
$$

นั่นคือ สัมประสิทธิ์ของพจน์ $x^8\ y^2$ คือ 11,520