


| | | |
|---|--|----------------------|
|  | แผนการจัดการเรียนรู้มุ่งเน้นสมรรถนะ | หน่วยที่ 5 |
| | ชื่อหน่วย อนุพันธ์ของฟังก์ชัน | สัปดาห์ที่ 9-10 |
| | | ชั่วโมงรวม 6 ชั่วโมง |
| | | สอนจำนวน 2 ครั้ง |

1. สาระสำคัญ

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน เป็นการศึกษาถึงการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน เมื่อตัวแปรในฟังก์ชันมีการเปลี่ยนแปลงทีละน้อย เริ่มจากศึกษาการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรก่อน ผลการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรทำให้ฟังก์ชันมีการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปร เราเรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย คือ $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ และเมื่อ Δx มีค่าเข้าใกล้ 0 เราจะเรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรนี้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของฟังก์ชัน หรืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน นั่นคือ $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

2. สมรรถนะประจำหน่วย

1. ดำเนินการเกี่ยวกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรและของฟังก์ชันได้
2. คำนวณหาค่าเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันได้
3. คำนวณหาค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรได้
4. คำนวณหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

4. เนื้อหาสาระการเรียนรู้

หน่วยที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ประกอบไปด้วยหัวข้อหรือเนื้อหาสาระการเรียนรู้ในเรื่องต่อไปนี้

1. การเปลี่ยนแปลงของตัวแปร
2. การเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน
3. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปร
4. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

5. กิจกรรมการเรียนรู้


5.1 การนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูและผู้เรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับตัวแปรพร้อมทั้งยกตัวอย่างอย่างง่ายและร่วมกันเฉลย เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

5.2 การเรียนรู้

2. ครูอธิบายการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร ดังนี้

ตัวแปร หมายถึง ค่าที่เปลี่ยนแปลงค่าได้ ซึ่งค่าของตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงไปนั้นจะมีได้ 2 ลักษณะ คือ เปลี่ยนในลักษณะที่เพิ่มขึ้นและเปลี่ยนในลักษณะที่ลดลง เช่น ถ้า x เป็นตัวแปร ส่วนที่เปลี่ยนไปของค่า x เราเรียกว่า ส่วนที่เปลี่ยนแปลงของ x (Increase of x) เขียนแทนด้วย Δx ซึ่งเมื่อ

| | | |
|---|--|----------------------|
|  | แผนการจัดการเรียนรู้มุ่งเน้นสมรรถนะ | หน่วยที่ 5 |
| | ชื่อหน่วย อนุพันธ์ของฟังก์ชัน | สัปดาห์ที่ 9-10 |
| | | ชั่วโมงรวม 6 ชั่วโมง |
| | | สอนจำนวน 2 ครั้ง |

พิจารณาแล้ว ถ้า Δx มีค่าเป็นบวก แสดงว่า ตัวแปร x เปลี่ยนไปในลักษณะที่เพิ่มขึ้น และถ้า Δx มีค่าเป็นลบก็แสดงว่า ตัวแปร x เปลี่ยนไปในลักษณะที่ลดลง ทำนองเดียวกันตัวแปรอื่นๆ ก็คิดลักษณะเดียวกับการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร x เช่นกัน

3. ครูอธิบายการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ดังนี้

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ (x) กับตัวแปรตาม (y) ซึ่งเราเขียนอยู่ในรูปของ $y = f(x)$ เมื่อ x มีการเปลี่ยนแปลงจากค่าของ x_1 ไปเป็น x_2 แล้วค่าของ y ย่อมต้องมีการเปลี่ยนแปลงค่าไปด้วยเช่นกัน นั่นคือ y จะมีการเปลี่ยนจาก y_1 ไปเป็น y_2 ค่าที่เปลี่ยนของ x เราเขียนแทนด้วย $\Delta x = x_2 - x_1$ ซึ่งเราจากเขียนแทน $x_2 = x_1 + \Delta x_1$ ก็ได้ทำนองเดียวกัน ค่าที่เปลี่ยนของ y เราเขียนแทนด้วย $\Delta y = y_2 - y_1$ ซึ่งเราจากเขียนแทนด้วย $y_2 = y_1 + \Delta y$ ได้เช่นกัน

$$y = f(x)$$

$$y_1 = f(x_1) \text{ และ } y_2 = f(x_2)$$

$$y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$


เราเรียกค่าของ Δy หรือ Δf นี้ว่า การเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ซึ่งจะมีผลเหมือนกับการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร นั่นคือ

ถ้า Δy หรือ Δf มีค่าเป็นบวก แสดงว่า ฟังก์ชันนั้นจะเปลี่ยนไปในลักษณะที่เพิ่มขึ้น และ ถ้า Δy หรือ Δf มีค่าเป็นลบ แสดงว่า ฟังก์ชันนั้นจะเปลี่ยนไปในลักษณะที่ลดลง

4. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 4.1 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 74 สำนักพิมพ์เอมแพ้นซ์ พร้อมตั้งคำถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

5. ครูอธิบายอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปร ดังนี้

จากหัวข้อที่ 1 และ 2 ที่ได้ศึกษามาแล้วนั้น เราสามารถหาอัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรได้ โดยอาศัยความรู้ในเรื่องการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร การเปลี่ยนแปลงฟังก์ชัน และเรื่องอัตราส่วน นั่นคือ

| | | |
|---|--|----------------------|
|  | แผนการจัดการเรียนรู้มุ่งเน้นสมรรถนะ | หน่วยที่ 5 |
| | ชื่อหน่วย อนุพันธ์ของฟังก์ชัน | สัปดาห์ที่ 9-10 |
| | | ชั่วโมงรวม 6 ชั่วโมง |
| | | สอนจำนวน 2 ครั้ง |

ถ้ากำหนดให้ $y_1 = f(x_1)$ (1)

และ $y_2 = f(x_2)$ (2)

(2) - (1) ; จะได้ว่า $y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$

$\therefore \Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ (3)

จาก (3) หารตลอดด้วย Δx จะได้ว่า $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$


ซึ่งอาจเขียน x แทน x_1 ก็ได้ ดังนั้น $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (4)

จากสมการ (4) เราเรียก $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชัน $f(x)$ หรือ y เทียบกับตัวแปร x

บทนิยาม กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับการเปลี่ยนแปลงของ x เขียนแทนด้วย

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

หรือเรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงในช่วง x ถึง $x + \Delta x$ ก็ได้



6. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 4.2 – 4.5 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 75-78 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

7. ครูอธิบายอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ดังนี้

จากความรู้ในเรื่องอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปร เมื่อกำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x แล้ว เมื่อ x มีค่าเปลี่ยนไปเป็น $x + \Delta x$ แล้วค่าของ $f(x)$ จะเปลี่ยนไปเป็น $f(x + \Delta x)$ ดังนั้น ส่วนที่เปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน คือ $f(x + \Delta x) - f(x)$ ส่วนที่เปลี่ยนแปลงของตัวแปร x คือ Δx

อัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชัน $f(x)$ เทียบกับตัวแปร x เราแทนด้วย

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ หรือ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ มีค่าเท่ากับ $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

นั่นคือ $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

จะเห็นได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $f(x)$ ขึ้นอยู่กับตัวแปร x นั่นคือ Δf จะขึ้นอยู่กับ Δx ถ้าค่าของ Δx มีการเปลี่ยนแปลงที่ละน้อยมากๆ หมายความว่า มีค่าเข้าใกล้ 0 เราก็เรียกอัตรการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $f(x)$ ในลักษณะนี้ว่า เป็นการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะ (Instantaneous rate of change) ของ $y = f(x)$ เขียนแทนด้วย



แผนการจัดการเรียนรู้มุ่งเน้นสมรรถนะ

หน่วยที่ 5

ชื่อหน่วย อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

สัปดาห์ที่ 9-10

ชั่วโมงรวม 6 ชั่วโมง

สอนจำนวน 2 ครั้ง

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ในทางคณิตศาสตร์ เราจะเรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของ $y = f(x)$ ที่ x ใดๆ นี้ว่า อนุพันธ์ (Derivative) ของ $y = f(x)$ ที่ x โดยเราจะเขียนแทน $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ ด้วย $\frac{dy}{dx}$ นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ นั่นเอง

บทนิยาม

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x คือ

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

เมื่อ **ลิมิตตามบทนิยามนี้** หาค่าได้



ข้อสังเกต

ถ้า $\frac{dy}{dx}$ หาค่าได้ เราจะกล่าวว่า y มีอนุพันธ์ที่ x ถ้า $\frac{dy}{dx}$ หาค่าไม่ได้ เราจะกล่าวว่า y ไม่มีอนุพันธ์ที่ x ซึ่งการจะหาค่า $\frac{dy}{dx}$ ได้หรือไม่ นั้น ขึ้นอยู่กับค่าของ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ นั่นเอง

สัญลักษณ์ที่ใช้เกี่ยวกับอนุพันธ์มีดังนี้

$\frac{dy}{dx}$ อ่านว่า ดีวายบายดีเอกซ์ หมายถึง อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x

$\frac{dz}{dx}$ อ่านว่า ดีแซดบายดีเอกซ์ หมายถึง อนุพันธ์ของ z เทียบกับ x

$\frac{dq}{dt}$ อ่านว่า ดีคิวบายดีที หมายถึง อนุพันธ์ของ q เทียบกับ t



8. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 4.6 – 4.7 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 80-82 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน จากนั้นให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 4.1 เพื่อทดสอบความเข้าใจ ครูและผู้เรียนร่วมกันเฉลย


5.3 การสรุป

9. ครูและผู้เรียนช่วยกันสรุปอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

10. ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 4 ข้อ 1 – 5 หน้า 83 – 85 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์

11. ครูให้ผู้เรียนจับคู่กันเปรียบเทียบคำตอบ

12. ครูเฉลยพร้อมผู้เรียนทั้งชั้น

| | | |
|---|--|----------------------|
|  | แผนการจัดการเรียนรู้มุ่งเน้นสมรรถนะ | หน่วยที่ 5 |
| | ชื่อหน่วย อนุพันธ์ของฟังก์ชัน | สัปดาห์ที่ 9-10 |
| | | ชั่วโมงรวม 6 ชั่วโมง |
| | | สอนจำนวน 2 ครั้ง |

13. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำข้อสอบในแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 4 ข้อ 1 – 15 หน้า 86 - 87 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมแพ้นส์เป็นการบ้านเพื่อเป็นทบทวนเนื้อหาที่ได้เรียนไป

6. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอมแพ้นส์
2. กิจกรรมการเรียนการสอน

7. เอกสารประกอบการจัดการเรียนรู้ (ใบความรู้ ใบงาน ใบมอบหมายงาน ฯลฯ)

7.1 ใบความรู้ในเรื่องดังต่อไปนี้

1. การเปลี่ยนแปลงของตัวแปร
2. การเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน
3. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปร
4. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

8. การบูรณาการ/ความสัมพันธ์กับวิชาอื่น

ไม่มี

9. การวัดผลและประเมินผล


วิธีวัดผล

1. ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน
4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
5. ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์


เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน
4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
5. ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เกณฑ์การประเมินผล

| | | |
|---|--|----------------------|
|  | แผนการจัดการเรียนรู้มุ่งเน้นสมรรถนะ | หน่วยที่ 5 |
| | ชื่อหน่วย อนุพันธ์ของฟังก์ชัน | สัปดาห์ที่ 9-10 |
| | | ชั่วโมงรวม 6 ชั่วโมง |
| | | สอนจำนวน 2 ครั้ง |

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 4.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
- 5.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับการประเมินตามสภาพจริง

| | | |
|---|-------------------------------------|----------------------|
|  | แผนการจัดการเรียนรู้มุ่งเน้นสมรรถนะ | หน่วยที่ 5 |
| | ชื่อหน่วย อนุพันธ์ของฟังก์ชัน | สัปดาห์ที่ 9-10 |
| | | ชั่วโมงรวม 6 ชั่วโมง |
| | | สอนจำนวน 2 ครั้ง |

10. บันทึกผลหลังการจัดการเรียนรู้
 ข้อสรุปหลังการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่พบ

.....

.....

.....

.....

แนวทางการแก้ไข

.....

.....

.....

.....