	แผนการจัดการเรียนรู้มุ่งเน้นสมรรถนะ	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย ฟังก์ชันตรรกยะ	สัปดาห์ที่ 3
		ชั่วโมงรวม 3 ชั่วโมง
		สอนจำนวน 1 ครั้ง

1. สาระสำคัญ

ฟังก์ชันตรรกยะเป็นฟังก์ชันพีชคณิตชนิดหนึ่ง ซึ่งมีการนำมาใช้ในวิชาช่างที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ประยุกต์ และสำหรับในวิชาแคลคูลัสพื้นฐานนี้ มีการนำเรื่องฟังก์ชันตรรกยะมาช่วยแก้ปัญหา เช่น การหาอินทิกรัลฟังก์ชันพีชคณิต ซึ่งในบางครั้งไม่สามารถหาอินทิกรัลได้โดยตรง ต้องนำมาแยกเป็นเศษส่วนย่อยก่อน จึงจะหาอินทิกรัลได้ จึงจำเป็นอย่างมากที่จะต้องมีการเรียนรู้ เรื่องฟังก์ชันตรรกยะ

2. สมรรถนะประจำหน่วย

1. ดำเนินการเกี่ยวกับการกระจายทวินาม และเศษส่วนย่อย

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกรูปแบบของฟังก์ชันตรรกยะได้
2. สามารถแยกฟังก์ชันตรรกยะเป็นเศษส่วนย่อยได้

4. เนื้อหาสาระการเรียนรู้

หน่วยที่ 2 ฟังก์ชันตรรกยะ ประกอบไปด้วยหัวข้อหรือเนื้อหาสาระการเรียนรู้ในเรื่องต่อไปนี้

1. ความหมายของฟังก์ชันตรรกยะ
2. เศษส่วนย่อย

5. กิจกรรมการเรียนรู้

5.1 การนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูและผู้เรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับทฤษฎีบททวินามพร้อมทั้งยกตัวอย่างอย่างง่ายและร่วมกันเฉลย เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

5.2 การเรียนรู้

2. ครูอธิบายบทนิยามฟังก์ชันพหุนามพร้อมยกตัวอย่างประกอบ

บทนิยาม

ฟังก์ชันพหุนาม คือ ฟังก์ชันพีชคณิตที่เขียนอยู่ในรูป

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

โดยที่ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ ไม่เป็น 0 พร้อมกันและ n เป็นจำนวนเต็มบวก



(๖) $n(x) = 2x^7 - 5x^6 + 5x^5 + 5x$

เบนฟังก์ชันพหุนามตัว y


สำหรับตัวอย่างฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพหุนาม ได้แก่

(1) $p(x) = 2x^2 + 5x^{-1} - 4$

เลขชี้กำลังเป็นลบ

(2) $q(x) = x^{3/2} + x^{2/3}$

เลขชี้กำลังเป็นเศษส่วน

	แผนการจัดการเรียนรู้มุ่งเน้นสมรรถนะ	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย ฟังก์ชันตรรกยะ	สัปดาห์ที่ 3
		ชั่วโมงรวม 3 ชั่วโมง
		สอนจำนวน 1 ครั้ง

(3) $r(x) = 2x^e$ เลขชี้กำลังไม่เป็นจำนวนเต็มบวก


3. ครูอธิบายความหมายของฟังก์ชันตรรกยะ

บทนิยาม

ฟังก์ชันตรรกยะ หมายถึง ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปของ

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

โดยที่ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามของตัวแปร x



ฟังก์ชันตรรกยะมี 2 ชนิดคือ

1. ฟังก์ชันตรรกยะที่เป็นเศษส่วนแท้ เรียกว่า **ฟังก์ชันตรรกยะแท้** หมายถึง ฟังก์ชันตรรกยะในรูป

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ โดยที่กำลังของ $P(x)$ น้อยกว่ากำลังของ $Q(x)$

เช่น $\frac{3x + 5}{x^2 - 3x + 4}$, $\frac{5x^2 + 4 - 7}{x^2 + 8}$ เป็นต้น

2. ฟังก์ชันตรรกยะที่ไม่เป็นเศษส่วนแท้ เรียกว่า **ฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้** หมายถึง

ฟังก์ชันตรรกยะในรูป $\frac{P(x)}{Q(x)}$ โดยที่มีกำลังของ $P(x)$ มากกว่า หรือเท่ากับกำลังของ $Q(x)$

เช่น $\frac{x^3 + 3x - 5x + 4}{2x^3 + 5}$, $\frac{x^2 + 4}{x^2 + 3x - 4}$ เป็นต้น

และเราสามารถเขียนฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันตรรกยะแท้ร่วมกับผลหารได้ โดยมีวิธีการเหมือนกับทำเศษส่วนเกินให้เป็นเศษส่วนคละ ดังนี้

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

เมื่อ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ คือ ฟังก์ชันตรรกยะที่ไม่เป็นเศษส่วนแท้

$g(x)$ คือ ผลหารที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

$r(x)$ คือ เศษเหลือซึ่งเป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีกำลังน้อยกว่า $Q(x)$


$\frac{r(x)}{Q(x)}$ คือ ฟังก์ชันตรรกยะที่เป็นเศษส่วนแท้

4. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 2.1 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 20 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

5. ครูใช้เทคนิคการเรียนรู้แบบอภิปราย เพื่อให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วมในการเรียนการสอน โดยครูตั้งข้อสงสัยเกี่ยวกับการหาผลบวกของ

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$$

สามารถทำได้อย่างไร

	แผนการจัดการเรียนรู้มุ่งเน้นสมรรถนะ	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย ฟังก์ชันตรรกยะ	สัปดาห์ที่ 3
		ชั่วโมงรวม 3 ชั่วโมง
		สอนจำนวน 1 ครั้ง

แล้วร่วมกับผู้เรียนอภิปรายจนได้ว่า การหาผลบวกของ นั้นสามารถทำได้โดยทำส่วนของเศษส่วนทั้งสองจำนวนให้เท่ากันก่อน แล้วจึงหาผลบวก หรือผลต่างต่อไป

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} &= \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)} + \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{2x-4+3x+3}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{5x-1}{x^2-x-2} \end{aligned}$$

จากนั้นครูแนะนำเพิ่มเติม ในทางตรงข้าม เราสามารถแยก $\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$ ให้เป็น $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$ ได้ซึ่งเรียกว่า การแยกฟังก์ชันตรรกยะให้เป็นเศษส่วนย่อย และเรียกว่า เศษส่วนย่อย

6. ครูเชื่อมโยงการอภิปรายเศษส่วนย่อยสู่ขั้นตอนการแยกฟังก์ชันตรรกยะให้เป็นเศษส่วนย่อย พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ ซึ่งการแยกฟังก์ชันตรรกยะให้เป็นเศษส่วนย่อยนั้นมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 การแยกตัวของ $Q(x)$ จะได้

$$Q(x) = a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \dots \cdot a_n(x)$$

ถ้า $q_1(x)$ เป็นตัวประกอบใดๆ และ i เป็นจำนวนเต็มบวก

เราเรียน $q_1(x)$ = $ax+b$ ว่า ตัวประกอบเชิงเส้น
= $(ax+b)^n$ ว่า ตัวประกอบเชิงเส้นซ้ำ
= ax^2+bx+c ว่า ตัวประกอบกำลังสอง
= $(ax^2+bx+c)^n$ ว่า ตัวประกอบกำลังสองซ้ำ

เช่น 1. $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

จะได้ $x + 3$ และ $x - 1$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้น

2. $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2$

จะได้ $(x + 2)^2$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้นซ้ำ

3. $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

จะได้ $x + 2$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้น $x^2 - 2x + 4$ เป็นตัวประกอบกำลังสอง

2. $x^4 + 6x^2 + 9 = (x^2 + 3)(x^2 + 3) = (x^2 + 3)^2$


จะได้ $(x^2 + 3)^2$ เป็นตัวประกอบกำลังสองซ้ำ

ขั้นที่ 2 เขียน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ เป็นเศษส่วนย่อย

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} + \dots$$

เศษส่วนย่อย แต่ละตัวจะเขียนอยู่ในรูป $\frac{A}{(ax+b)^n}$ หรือ $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ A, B, \dots เป็นค่าคงตัว

	แผนการจัดการเรียนรู้มุ่งเน้นสมรรถนะ	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย ฟังก์ชันตรรกยะ	สัปดาห์ที่ 3
		ชั่วโมงรวม 3 ชั่วโมง
		สอนจำนวน 1 ครั้ง

ตัวเศษส่วนย่อยจะเป็น A หรือ Ax+B ขึ้นอยู่กับตัวส่วนว่าเป็นตัวประกอบเชิงเส้นหรือเป็นตัวประกอบกำลังสอง และจำนวนของเศษส่วนย่อย จะเท่ากับจำนวนของตัวส่วน ดังนี้

- กรณีตัวส่วน Q(x) แยกได้เป็นตัวประกอบเชิงเส้น

$$\text{เช่น } \frac{3x-5}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

- กรณีตัวส่วน Q(x) แยกได้เป็นตัวประกอบเชิงเส้นซ้ำ

$$\text{เช่น } \frac{x^2+3x-5}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

- กรณีตัวส่วน Q(x) แยกได้เป็นตัวประกอบกำลังสอง

$$\text{เช่น } \frac{x^2+2x+7}{(x^2+2)(x^2+2x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

- กรณีตัวส่วน Q(x) แยกได้เป็นตัวประกอบกำลังสองซ้ำ

$$\text{เช่น } \frac{x^2-3x+3}{(x^2+2x-2)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2x-2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x-2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2x-2)^3}$$

- กรณีตัวส่วน Q(x) แยกได้เป็นตัวประกอบหลายแบบปนกัน การกำหนดตัวเศษส่วนย่อย จะกำหนดให้สอดคล้องกับตัวส่วนของเศษส่วนย่อยแต่ละรูปแบบ เช่น

$$(1) \frac{x-3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$(2) \frac{x^2+3x+7}{(x+1)(x^2-x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x-1}$$

$$(3) \frac{x^2+5x-7}{x^2(x^2-2x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x-2}$$

$$(4) \frac{x^3+3x^2+4x-5}{x^2(x^2+2x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+B}{x^2+2x-2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2x-2)^2}$$

ขั้นที่ 3 หาผลบวกของเศษส่วนย่อย โดยใช้หลักการบวก-การลบเศษส่วน

ขั้นที่ 4 หาค่าคงตัว A, B, C, ... ซึ่งมี 2 วิธี คือ

4.1 วิธีเทียบสัมประสิทธิ์


4.2 วิธีกำหนดค่าตัวแปร

ขั้นที่ 5 หาค่าคงตัว A, B, C ที่ได้ในเศษส่วนย่อยแต่ละตัว

7. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 2.2 - 2.5 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 22-26 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

8. ครูอธิบายการแยกส่วนย่อยของฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้

การแยกฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ออกเป็นเศษส่วนย่อย จะทำได้โดย การทำให้เป็นฟังก์ชันเศษส่วนลดก่อนแล้วจึงนำฟังก์ชันตรรกยะแท้ไปแยกออกเป็นเศษส่วนย่อยต่อไป

	แผนการจัดการเรียนรู้มุ่งเน้นสมรรถนะ	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย ฟังก์ชันตรรกยะ	สัปดาห์ที่ 3
		ชั่วโมงรวม 3 ชั่วโมง
		สอนจำนวน 1 ครั้ง

9. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 2.6 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 26 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้ง
 สุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

5.3 การสรุป

10. ครูและผู้เรียนช่วยกันสรุปเรื่อง ฟังก์ชันตรรกยะ
11. ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 2 ข้อ 1 – 3 หน้า 28 – 32 ในหนังสือ
 เรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์
12. ครูให้ผู้เรียนจับคู่กันเปรียบเทียบคำตอบ
13. ครูเฉลยพร้อมผู้เรียนทั้งชั้น

6. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอมพันธ์
2. กิจกรรมการเรียนการสอน

7. เอกสารประกอบการจัดการเรียนรู้ (ใบความรู้ ใบงาน ใบมอบหมายงาน ฯลฯ)

7.1 ใบความรู้ในเรื่องดังต่อไปนี้

1. ความหมายของฟังก์ชันตรรกยะ
2. เศษส่วนย่อย

8. การบูรณาการ/ความสัมพันธ์กับวิชาอื่น

ไม่มี

9. การวัดผลและประเมินผล


วิธีวัดผล

1. ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน
4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
5. ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เครื่องมือวัดผล


1. แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน

	แผนการจัดการเรียนรู้มุ่งเน้นสมรรถนะ	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย ฟังก์ชันตรรกยะ	สัปดาห์ที่ 3
		ชั่วโมงรวม 3 ชั่วโมง
		สอนจำนวน 1 ครั้ง

4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
5. ประเมินพฤติกรรมกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
2. กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
4. เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
5. เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับผลการประเมินตามสภาพจริง

	แผนการจัดการเรียนรู้มุ่งเน้นสมรรถนะ	หน่วยที่ 2
	ชื่อหน่วย ฟังก์ชันตรรกยะ	สัปดาห์ที่ 3
		ชั่วโมงรวม 3 ชั่วโมง
		สอนจำนวน 1 ครั้ง

10. บันทึกผลหลังการจัดการเรียนรู้
 ข้อสรุปหลังการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่พบ

.....

.....

.....

.....

แนวทางการแก้ไข

.....

.....

.....

.....